Dans tous les exercices, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

AIDE MEMOIRE : dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

La norme du vecteur $\vec{u}$ est : $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

EXERCICE 2D.1

Calculer la norme de chacun de ces vecteurs :

a. $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ **b.** $\vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$ **c.** $\vec{w}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ **d.** $\vec{x}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ **e.** $\vec{y}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

EXERCICE 2D.2

On donne $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$. Calculer les coordonnées des vecteurs suivants :

a. $\vec{u} + \vec{v}$ **b.** $3\vec{w}$ **c.** $2\vec{u} - 3\vec{v}$ **d.** $\vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w}$

EXERCICE 2D.3

Dans chaque cas, indiquer si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires :

a. $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$ **b.** $\vec{u}\begin{pmatrix} 21 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 35 \\ 25 \\ 41 \end{pmatrix}$ **c.** $\vec{u}\begin{pmatrix} 35 \\ 0 \\ -49 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 56 \end{pmatrix}$ **d.** $\vec{u}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 15 \end{pmatrix}$

EXERCICE 2D.4

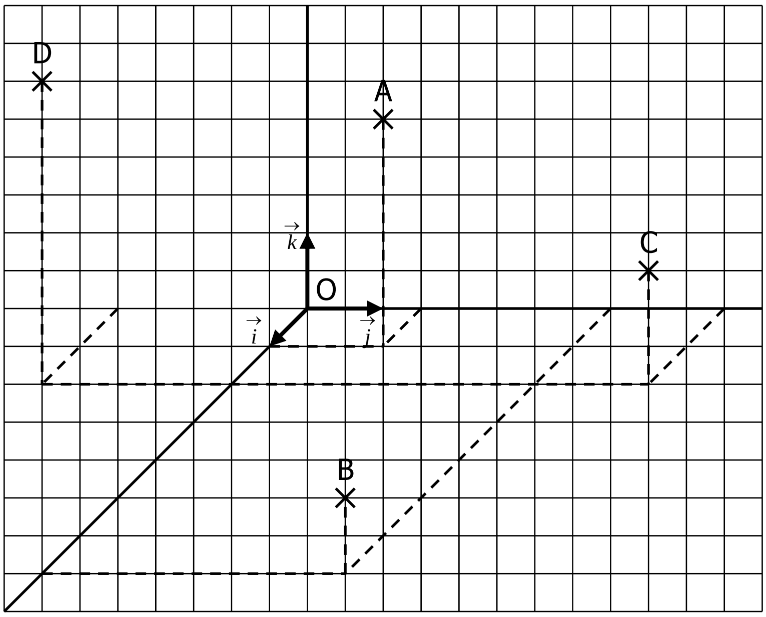
a. Lire les coordonnées de A, B, C et D dans ce repère de l'espace.

b. Placer dans ce repère les points suivants :
E (1 ; 2 ; 3) F (5 ; 4 ; 1)
G (7 ; 5 ; 0) H (-3 ; 0 ; 2)

c. Calculer les coordonnées du milieu I de [EF]

d. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$.

e. Démontrer que les points E, F et G sont alignés.



EXERCICE 2D.5

On considère les points A(2 ; 5 ; -2), B(-1 ; 2 ; 0), C(3 ; 0 ; -1) et D(-4 ; -2 ; 2).

a. On considère le point G(x ; y ; z) tel que $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Déterminer les coordonnées de G.

b. Déterminer les coordonnées de I tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG}$

c. Déterminer les coordonnées de E et F, milieux respectifs de [AB] et [CD].

d. Montrer que I est le milieu de [EF].

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

EXERCICE 2D.1 *Calculer la norme de chacun de ces vecteurs :*

$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} \rightarrow \|\vec{u}\| = \sqrt{2^2+1^2+3^2} = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$ $\qquad$ $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\-7\\2\end{pmatrix} \rightarrow \|\vec{v}\| = \sqrt{5^2+(-7)^2+2^2} = \sqrt{25+49+4} = \sqrt{78}$

$\vec{w}\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} \rightarrow \|\vec{w}\| = \sqrt{3^2+0^2+4^2} = \sqrt{9+0+16} = \sqrt{25} = 5$

$\vec{x}\begin{pmatrix}2\\-5\\-1\end{pmatrix} \rightarrow \|\vec{x}\| = \sqrt{2^2+(-5)^2+(-1)^2} = \sqrt{4+25+1} = \sqrt{30}$ $\qquad$ $\vec{y}\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix} \rightarrow \|\vec{y}\| = \sqrt{(-4)^2+0^2+0^2} = \sqrt{16+0+0} = 4$

EXERCICE 2D.2 *On donne* $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\-7\\2\end{pmatrix}$ *et* $\vec{w}\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$. *Calculer les coordonnées des vecteurs suivants :*

$\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}2+5\\1+(-7)\\3+2\end{pmatrix} \rightarrow \vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}7\\-6\\5\end{pmatrix}$ $\qquad$ $3\vec{w}\begin{pmatrix}3\times3\\3\times0\\3\times4\end{pmatrix} \rightarrow 3\vec{w}\begin{pmatrix}9\\0\\12\end{pmatrix}$

$2\vec{u}-3\vec{v}\begin{pmatrix}2\times2-3\times5\\2\times1-3\times(-7)\\2\times3-3\times2\end{pmatrix} \rightarrow 2\vec{u}-3\vec{v}\begin{pmatrix}-11\\23\\0\end{pmatrix}$ $\qquad$ $\vec{u}-2\vec{v}+3\vec{w}\begin{pmatrix}2-2\times5+3\times3\\1-2\times(-7)+3\times0\\3-2\times2+3\times4\end{pmatrix} \rightarrow \vec{u}-2\vec{v}+3\vec{w}\begin{pmatrix}1\\15\\11\end{pmatrix}$

EXERCICE 2D.3 *Dans chaque cas, indiquer si les vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires :*

$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\10\\6\end{pmatrix}$ $\rightarrow \frac{4}{2}=\frac{10}{5}=\frac{6}{3}=2$ donc $\vec{v}=2\times\vec{u}$: ces vecteurs sont colinéaires.

$\vec{u}\begin{pmatrix}21\\15\\24\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}35\\25\\41\end{pmatrix}$ $\rightarrow \frac{35}{21}=\frac{7\times5}{7\times3}=\frac{25}{15}=\frac{5\times5}{5\times3}=\frac{5}{3}$ or $\frac{41}{24}\neq\frac{5}{3}$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires.

$\vec{u}\begin{pmatrix}35\\0\\-49\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-40\\0\\56\end{pmatrix}$ $\rightarrow \frac{-40}{35}=\frac{8\times5}{7\times5}=\frac{56}{-49}=\frac{8\times7}{-7\times7}=-\frac{8}{7}$ donc $\vec{v}=-\frac{8}{7}\times\vec{u}$: ces vecteurs sont colinéaires.

$\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\3\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\-9\\15\end{pmatrix}$ $\rightarrow \frac{6}{-4}=-\frac{3}{2}$ et $\frac{-9}{3}=-3$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires.

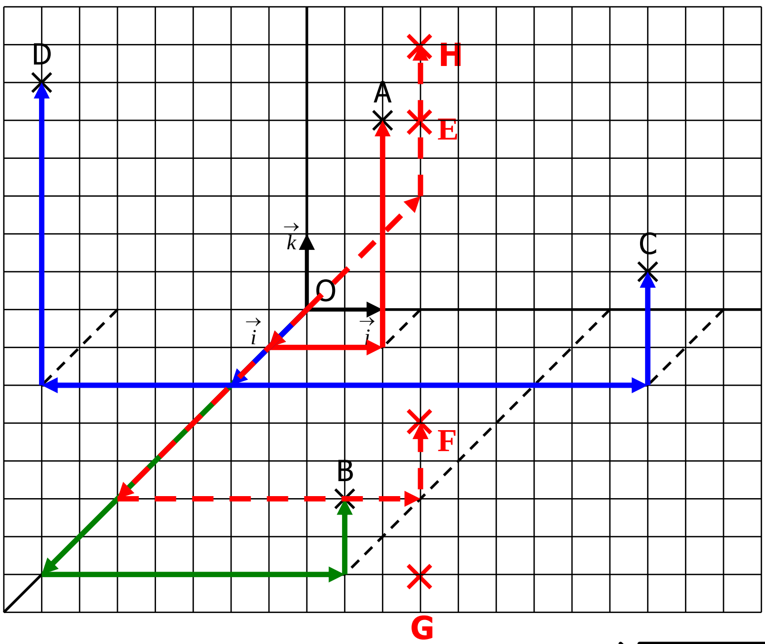
EXERCICE 2D.4

a. *Lire les coordonnées de A, B, C et D dans ce repère de l'espace.*

A (1 ; 1,5 ; 3) , B (7 ; 4 ; 1)
C (2 ; 5,5 ; 1,5) , D (2 ; -2,5 ; 4)

b. *Placer dans ce repère les points suivants :*

E (1 ; 2 ; 3) $\qquad$ F (5 ; 4 ; 1)
G (7 ; 5 ; 0) $\qquad$ H (-3 ; 0 ; 2)



c. *Calculer les coordonnées du milieu I de [EF]*

$I\left(\frac{1+5}{2};\frac{2+4}{2};\frac{3+1}{2}\right) \rightarrow I(3;3;2)$

d. $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}5-1\\4-2\\1-3\end{pmatrix} \rightarrow \overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}4\\2\\-2\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}7-1\\5-2\\0-3\end{pmatrix} \rightarrow \overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}6\\3\\-3\end{pmatrix}$$

e. Démontrer que les points E, F et G sont alignés.

$\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}$ donc $\overrightarrow{EG}=\frac{3}{2}\times\overrightarrow{EF}$ ainsi les droites (EF) et (EG) sont parallèles et confondues et les points E, F et G sont alignés.

EXERCICE 2D.5

On considère les points A(2 ; 5 ; -2), B(-1 ; 2 ; 0), C(3 ; 0 ; -1) et D(-4 ; -2 ; 2).

a. On considère le point G(x ; y ; z) tel que $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. Déterminer les coordonnées de G.

Deux méthodes :

1) $\overrightarrow{GB}\begin{pmatrix}-1-x\\2-y\\0-z\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{GC}\begin{pmatrix}3-x\\0-y\\-1-z\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{GD}\begin{pmatrix}-4-x\\-2-y\\2-z\end{pmatrix}$ donc l'équation devient : $\begin{cases}-1-x+3-x-4-x=0\\2-y+0-y-2-y=0\\0-z-1-z+2-z=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-3x-2=0\\-3y=0\\1-3z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x=2\\y=0\\-3z=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{2}{3}\\y=0\\z=\frac{1}{3}\end{cases}\rightarrow G\left(-\frac{2}{3};0;\frac{1}{3}\right)$$

2) Par la relation de Chasles, on obtient :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}\\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BD}=\vec{0}\\ \Leftrightarrow\ &3\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}=\vec{0}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{GB}\begin{pmatrix}-1-x\\2-y\\0-z\end{pmatrix},\ \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3-(-1)\\0-2\\-1-0\end{pmatrix}\rightarrow\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}4\\-2\\-1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-4-(-1)\\-2-2\\2-0\end{pmatrix}\rightarrow\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-3\\-4\\2\end{pmatrix}$$

$$3\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}3\times(-1-x)+4-3=0\\3\times(2-y)-2-4=0\\3\times(-z)-1+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x-2=0\\-3y+0=0\\-3z+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{2}{3}\\y=0\\z=\frac{1}{3}\end{cases}\rightarrow G\left(-\frac{2}{3};0;\frac{1}{3}\right)$$

b. Déterminer les coordonnées de $I(x;y;z)$ tel que $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AG}$

$$\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}x-2\\y-5\\z+2\end{pmatrix}\text{ et }\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}-2\\0-5\\\frac{1}{3}+2\end{pmatrix}\rightarrow\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}-\frac{8}{3}\\-5\\\frac{7}{3}\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AG}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2=\frac{3}{4}\times\left(-\frac{8}{3}\right)\\y-5=\frac{3}{4}\times(-5)\\z+2=\frac{3}{4}\times\frac{7}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2=-2\\y-5=-\frac{15}{4}\\z+2=\frac{7}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=-\frac{15}{4}+\frac{20}{4}=\frac{5}{4}\\z=\frac{7}{4}-\frac{8}{4}=-\frac{1}{4}\end{cases}\rightarrow I\left(0;\frac{5}{4};-\frac{1}{4}\right)$$

c. Déterminer les coordonnées de E et F, milieux respectifs de [AB] et [CD].
points A(2 ; 5 ; -2), B(-1 ; 2 ; 0), C(3 ; 0 ; -1) et D(-4 ; -2 ; 2).

$$E\left(\frac{2+(-1)}{2};\frac{5+2}{2};\frac{-2+0}{2}\right) \rightarrow E\left(\frac{1}{2};\frac{7}{2};-1\right) \qquad F\left(\frac{3+(-4)}{2};\frac{0+(-2)}{2};\frac{-1+2}{2}\right) \rightarrow F\left(-\frac{1}{2};-1;\frac{1}{2}\right)$$

d. Montrer que I est le milieu de [EF].

Le milieu de [EF] vérifie : $\left(\frac{\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)}{2};\frac{\frac{7}{2}+(-1)}{2};\frac{-1+\frac{1}{2}}{2}\right) \rightarrow \left(0;\frac{\frac{5}{2}}{2};\frac{-\frac{1}{2}}{2}\right) \rightarrow \left(0;\frac{5}{4};-\frac{1}{4}\right)$

On reconnait les coordonnées du point I.