Fiche 4A : Représentation paramétrique de droites et intersections de droites

Exercice 4A.1 :

L'espace est rapporté à un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

Soient $A(3;1;-1)$ et $B(0;2;-2)$. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

Le point $C(-3;3;1)$ appartient-il à la droite (AB) ?

Exercice 4A.2 :

L'espace est rapporté à un $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

On considère les points $A(2;-1;5)$; $B(1;-3;2)$ et $C(2;3;9)$ et le vecteur $\vec{u}(1;0;1)$.

Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) et une représentation paramétrique de la droite passant par C et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Déterminer si ces deux droites sont sécantes et donner éventuellement les coordonnées de leur point d'intersection.

Exercice 4A.3 :

L'espace est rapporté à un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

1) Justifier que l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $\begin{cases} x=2+3t \\ y=-1+2t \\ z=2-4t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ est une droite d que l'on caractérisera.
2) Justifier que l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $\begin{cases} x=5-6k \\ y=1-4k \\ z=-2+8k \end{cases}, k\in\mathbb{R}$ est une droite d' que l'on caractérisera.
3) Que peut-on dire des positions relatives de d et d' ?
4) Justifier que l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $\begin{cases} x=3-\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=2 \end{cases}, \lambda\in\mathbb{R}$ est une droite δ que l'on caractérisera. Donner deux points distincts de δ.
5) Que peut-on dire des positions relatives de d et δ ?

Exercice 4A.4

Soit (D) et (D') deux droites d'équations paramétriques :

$$(D):\begin{cases} x=4t+2 \\ y=-7t+1 \\ z=-2t-3 \end{cases}, t\in\mathbb{R} \quad \text{et} \quad (D'):\begin{cases} x=-k-5 \\ y=4k+2 \\ z=-2k+13 \end{cases}, k\in\mathbb{R}.$$

Déterminer les coordonnées du point A, intersection des droites (D) et (D'), s'il existe.

Exercice 4A.5

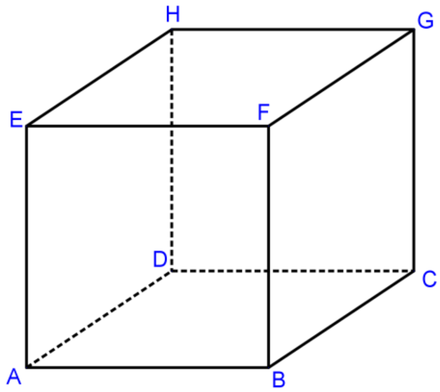
Soit (Δ) et (Δ') deux droites d'équations paramétriques :

$$(\Delta):\begin{cases} x=3t+1 \\ y=t+2 \\ z=-2t \end{cases}, t\in\mathbb{R} \quad \text{et} \quad (\Delta'):\begin{cases} x=2k+1 \\ y=-k+2 \\ z=4k+1 \end{cases}, k\in\mathbb{R}.$$

Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (Δ) et (Δ'), s'il existe.

Exercice 4A.6 :

On considère un cube ABCDEFGH.



1) Donner, sans justification, les coordonnées des différents sommets du cube dans le repère $\left(\mathrm{A};\overrightarrow{\mathrm{AB}};\overrightarrow{\mathrm{AD}};\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.
2) Donner les coordonnées de I milieu de [AB] et J milieu de [AD].
3) Donner une représentation paramétrique de la droite (FI) et une représentation paramétrique de la droite (HJ).
4) Démontrer que les droites (FI) et (HJ) sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection Ω.
5) Justifier que Ω, A et E sont alignés.

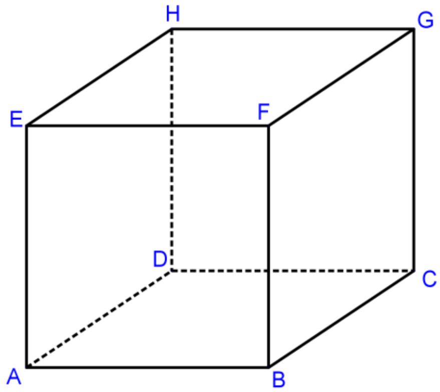
Exercice 4A.7 :

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.

On se place dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{A};\overrightarrow{\mathrm{AB}};\overrightarrow{\mathrm{AD}};\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

On considère les points $\mathrm{I}\left(1;\frac{1}{4};0\right)$; $\mathrm{J}\left(0;\frac{3}{4};1\right)$; $\mathrm{K}\left(\frac{2}{5};0;1\right)$ et

$\mathrm{L}(a;1;0)$ avec a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0;1]$.



1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).
2) Démontrer que la droite (KL) a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \frac{2}{5} + \left(a - \frac{2}{5}\right)k \\ y = k \\ z = 1 - k \end{cases} ,k \in \mathbb{R}$$

3) Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si et seulement si $a = \frac{3}{5}$.

   Donner alors les coordonnées de leur point d'intersection.

Exercice 4A.1 :

L'espace est rapporté à un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

Soient $A(3;1;-1)$ *et* $B(0;2;-2)$. *Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).*

Le point $C(-3;3;1)$ *appartient-il à la droite (AB) ?*

Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix}$.

La droite (AB) est l'ensemble des points $M(x;y;z)$ vérifiant : $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$ pour tout réel k, soit :

$$\begin{cases}x=3-3k\\y=1+k\quad,k\in\mathbb{R}\\z=-1-k\end{cases}.$$

Existe-t-il un unique réel k vérifiant $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$?

$$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}\iff\begin{cases}-3=3-3k\\3=1+k\\1=-1-k\end{cases},\iff\begin{cases}-6=-3k\\2=k\\2=-k\end{cases}\iff\begin{cases}2=k\\2=k\\-2=k\end{cases}$$

Le système est incompatible, le point C n'appartient pas à la droite (AB).

Exercice 4A.2 :

L'espace est rapporté à un $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

On considère les points $A(2;-1;5)$; $B(1;-3;2)$ *et* $C(2;3;9)$ *et le vecteur* $\vec{u}(1;0;1)$.

Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) et une représentation paramétrique de la droite passant par C et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Déterminer si ces deux droites sont sécantes et donner éventuellement les coordonnées de leur point d'intersection.

Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}$.

La droite (AB) est l'ensemble des points $M(x;y;z)$ vérifiant : $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$ pour tout réel k, soit :

$$\begin{cases}x=2-k\\y=-1-2k,k\in\mathbb{R}\\z=5-3k\end{cases}.$$

La droite passant par C et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points $M(x;y;z)$ vérifiant : $\overrightarrow{CM}=t\vec{u}$ pour tout réel *t*, soit :

$$\begin{cases}x=2+t\\y=3\quad,t\in\mathbb{R}\\z=9+t\end{cases}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires dont les droites ne sont pas parallèles : elles sont soit sécantes, soit non coplanaires.

Si un point appartient à ces deux droites, il vérifie les deux systèmes paramétriques, donc on résout :

$$\begin{cases} 2-k=2+t \\ -1-2k=3 \\ 5-3k=9+t \end{cases} \Leftrightarrow \text{on isole une variable} \begin{cases} -k=t \\ -1-2k=3 \\ 5-3k=9+(-k) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-k \\ -2k=4 \\ -2k=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-k \\ k=-2 \\ k=-2 \end{cases}$$

Le système est compatible, on obtient $k=-2$ et $t=2$, que l'on utilise dans les représentations paramétriques : $k=-2$ et $t=2$ donnent les coordonnées du point d'intersection $\mathrm{M}(4;3;11)$.

Exercice 4A.3 :

L'espace est rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

1) *Justifier que l'ensemble des points* $\mathrm{M}(x;y;z)$ *tels que* $\begin{cases} x=2+3t \\ y=-1+2t, t\in\mathbb{R} \\ z=2-4t \end{cases}$ *est une droite d que l'on caractérisera.*

L'ensemble des points $\mathrm{M}(x;y;z)$ vérifiant : $\begin{cases} x=2+3t \\ y=-1+2t, t\in\mathbb{R} \\ z=2-4t \end{cases}$ est une droite d passant par le point $\mathrm{A}(2;-1;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(3;2;-4)$.

2) *Justifier que l'ensemble des points* $\mathrm{M}(x;y;z)$ *tels que* $\begin{cases} x=5-6k \\ y=1-4k \quad ,k\in\mathbb{R} \\ z=-2+8k \end{cases}$ *est une droite d' que l'on caractérisera.*

L'ensemble des points $\mathrm{M}(x;y;z)$ vérifiant : $\begin{cases} x=5-6k \\ y=1-4k \quad ,k\in\mathbb{R} \\ z=-2+8k \end{cases}$ est une droite d' passant par le point $\mathrm{B}(5;1;-2)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(-6;-4;8)$.

3) *Que peut-on dire des positions relatives de d et d' ?*

On remarque que $\vec{v}=-2\vec{u}$ donc les droites sont parallèles. Sont-elles confondues ?
On regarde si le point A de la droite d appartient à la droite d' :

$$\begin{cases} 2=5-6k \\ -1=1-4k \\ 2=-2+8k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3=-6k \\ -2=-4k \\ 4=+8k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}=k \\ \frac{1}{2}=k \\ \frac{1}{2}=k \end{cases}$$: le système est compatible :

A appartient à d' et les droites d et d' sont confondues.

4) *Justifier que l'ensemble des points* $\mathrm{M}(x;y;z)$ *tels que* $\begin{cases} x=3-\lambda \\ y=1+\lambda, \lambda\in\mathbb{R} \\ z=2 \end{cases}$ *est une droite* δ *que l'on caractérisera. Donner deux points distincts de* δ.

L'ensemble des points $M(x;y;z)$ vérifiant : $\begin{cases} x=3-\lambda \\ y=1+\lambda, \lambda\in\mathbb{R} \\ z=2 \end{cases}$ est une droite δ passant par le point $C(3;1;2)$ et de vecteur directeur $\vec{w}(-1;1;0)$.

Pour trouver un autre point, on prend λ quelconque non nul. Pour $\lambda=1$, on obtient :

$$\begin{cases} x=3-1 \\ y=1+1 \\ z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \\ z=2 \end{cases}$$ ce qui donne le point $D(2;2;2)$.

5) *Que peut-on dire des positions relatives de d et δ ?*

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires dont les droites *d* et *δ* ne sont pas parallèles : elles sont soit sécantes, soit non coplanaires.

Si un point appartient à ces deux droites, ses coordonnées vérifient les deux systèmes paramétriques :

$$\begin{cases} 2+3t=3-\lambda \\ -1+2t=1+\lambda \\ 2-4t=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+3\times0=3-\lambda \\ -1+2\times0=1+\lambda \\ t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1=-\lambda \\ -2=\lambda \\ t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=\lambda \\ -2=\lambda \\ t=0 \end{cases}$$

Le système n'est pas compatible, les droites sont non coplanaires.

Exercice 4A.4 *Soit (D) et (D') deux droites d'équations paramétriques :*

$$(D):\begin{cases} x=4t+2 \\ y=-7t+1, t\in\mathbb{R} \\ z=-2t-3 \end{cases} \quad et \quad (D'):\begin{cases} x=-k-5 \\ y=4k+2 \quad , k\in\mathbb{R}. \\ z=-2k+13 \end{cases}$$

Déterminer les coordonnées du point A, intersection des droites (D) et (D'), s'il existe.

On peut extraire un vecteur directeur pour chaque droite :

pour (D) : $\vec{u}(4;-7;-2)$, et pour (D') : $\vec{v}(-1;4;-2)$.

Etude du parallélisme des droites :

Supposons qu'il existe un réel *k* tel que $k\times\vec{u}=\vec{v}$, on obtient le système :

$$\begin{cases} 4k=-1 \\ -7k=4 \\ -2k=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-\frac{1}{4} \\ k=-\frac{4}{7} \\ k=1 \end{cases}$$ → ce système est incompatible

Les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires et les droites ne sont pas parallèles.

Supposons qu'il existe un point appartenant à ces droites, ses coordonnées vérifient les deux équations paramétriques, donc :

$$\begin{cases} 4t+2=-k-5 \\ -7t+1=4k+2 \\ -2t-3=-2k+13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-4t-2-5 \\ -7t+1=4k+2 \\ -2t-3=-2k+13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-4t-7 \\ -7t+1=4(-4t-7)+2 \\ -2t-3=-2(-4t-7)+13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k=-4t-7 \\ -7t+1=-16t-28+2 \\ -2t-3=8t+14+13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-4t-7 \\ -7t+16t=-26-1 \\ -2t-8t=27+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-4t-7 \\ 9t=-27 \\ -10t=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-4t-7 \\ t=-3 \\ t=-3 \end{cases}$$

→le système est compatible, et on obtient : $k=-4\times(-3)-7=12-7=5$.

Les droites sont donc sécantes et un point $\mathrm{A}(-10;22;3)$.

Exercice 4A.5 *Soit (Δ) et (Δ') deux droites d'équations paramétriques :*

$$(\Delta):\begin{cases} x=3t+1 \\ y=t+2 \\ z=-2t \end{cases},\ t\in\mathbb{R} \quad et \quad (\Delta'):\begin{cases} x=2k+1 \\ y=-k+2 \\ z=4k+1 \end{cases},\ k\in\mathbb{R}.$$

Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (Δ) et (Δ'), s'il existe.

On peut extraire un vecteur directeur pour chaque droite :

pour (Δ) : $\vec{u}(3;1;-2)$, et pour (Δ') : $\vec{v}(2;-1;4)$.

Etude du parallélisme des droites :

supposons qu'il existe un réel *k* tel que $k\times\vec{u}=\vec{v}$, on obtient le système :

$$\begin{cases} 3k=2 \\ k=-1 \\ -2k=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=\dfrac{2}{3} \\ k=-1 \\ k=-2 \end{cases}$$ → ce système est incompatible

→ les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires et les droites ne sont pas parallèles.

Supposons qu'il existe un point appartenant à ces droites, ses coordonnées vérifient les deux équations paramétriques, donc :

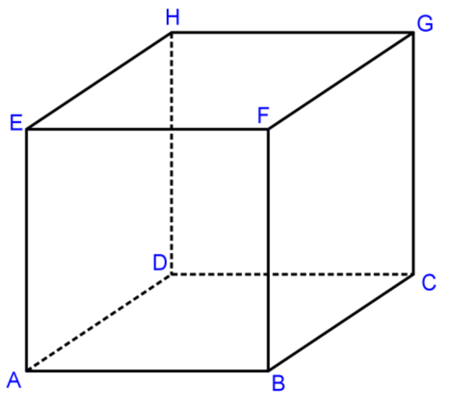
$$\begin{cases} 3t+1=2k+1 \\ t+2=-k+2 \\ -2t=4k+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(-k)+1=2k+1 \\ t=-k \\ -2(-k)=4k+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3k+1=2k+1 \\ t=-k \\ 2k=4k+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3k-2k=1-1 \\ t=-k \\ 2k-4k=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5k=0 \\ t=-k \\ -2k=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=0 \\ t=-k \\ k=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$ → ce système est incompatible

Les droites (Δ) et (Δ') ne sont pas sécantes.

Exercice 4A.6 :

On considère un cube ABCDEFGH.



1) *Donner, sans justification, les coordonnées des différents sommets du cube dans le repère $(\mathrm{A};\overrightarrow{\mathrm{AB}};\overrightarrow{\mathrm{AD}};\overrightarrow{\mathrm{AE}})$.*

$\mathrm{A}(0;0;0)$, $\mathrm{B}(1;0;0)$, $\mathrm{C}(1;1;0)$, $\mathrm{D}(0;1;0)$, $\mathrm{E}(0;0;1)$, $\mathrm{F}(1;0;1)$, $\mathrm{G}(1;1;1)$, $\mathrm{H}(0;1;1)$

2) *Donner les coordonnées de I milieu de [AB] et J milieu de [AD].*

$$\mathrm{I}\left(\frac{0+1}{2};\frac{0+0}{2};\frac{0+0}{2}\right) \text{ soit } \mathrm{I}\left(\frac{1}{2};0;0\right)$$

$J\left(\frac{0+0}{2};\frac{0+1}{2};\frac{0+0}{2}\right)$ soit $J\left(0;\frac{1}{2};0\right)$

3) *Donner une représentation paramétrique de la droite (FI) et une représentation paramétrique de la droite (HJ).*

La droite (FI) est l'ensemble des points $M(x;y;z)$ vérifiant : $\overrightarrow{FM}=k\overrightarrow{FI}$ pour tout réel k, soit :

$\overrightarrow{FI}\begin{pmatrix}-0,5\\0\\-1\end{pmatrix}$ d'où la représentation paramétrique suivante : $\begin{cases}x=1-0,5k\\y=0\\z=1-k\end{cases}$, $k\in\mathbb{R}$.

La droite (HJ) est l'ensemble des points $M(x;y;z)$ vérifiant : $\overrightarrow{HM}=t\overrightarrow{HJ}$ pour tout réel *t*, soit :

$\overrightarrow{HJ}\begin{pmatrix}0\\-0,5\\-1\end{pmatrix}$ d'où la représentation paramétrique suivante : $\begin{cases}x=0\\y=1-0,5t\\z=1-t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

4) *Démontrer que les droites (FI) et (HJ) sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection Ω.*

Les vecteurs $\overrightarrow{FI}$ et $\overrightarrow{HJ}$ ne sont pas colinéaires donc les droites ne sont pas parallèles, et sont donc soit sécantes, soit non coplanaires. Les points communs des deux droites vérifient les deux systèmes :

$\begin{cases}1-0,5k=0\\0=1-0,5t\\1-k=1-t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=2\\2=t\\1-2=1-2\end{cases}$: le système est compatible, les droites sont sécantes.

En prenant $k=2$ et $t=2$, on obtient le même point : $\Omega(0;0;-1)$.

5) *Justifier que Ω, A et E sont alignés.*

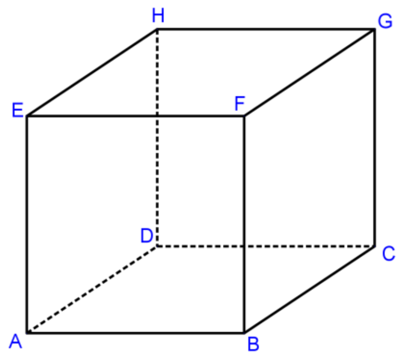
Les vecteurs $\overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\Omega E}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$ vérifient : $\overrightarrow{\Omega E}=2\overrightarrow{\Omega A}$ donc ils sont colinéaires et les points sont alignés.

Exercice 4A.7 :

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.

On se place dans le repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$.

On considère les points $I\left(1;\frac{1}{4};0\right)$; $J\left(0;\frac{3}{4};1\right)$; $K\left(\frac{2}{5};0;1\right)$ et $L(a;1;0)$ avec a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0;1]$.



1) *Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).*

La droite (IJ) est l'ensemble des points $M(x;y;z)$ vérifiant :

$\overrightarrow{IM}=k\overrightarrow{IJ}$ pour tout réel *k*, avec $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-1\\0,5\\1\end{pmatrix}$, d'où : $\begin{cases}x=1-k\\y=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}k\\z=k\end{cases}$, $k\in\mathbb{R}$.

2) *Déterminer la représentation paramétrique de la droite (KL) :*

La droite (KL) est l'ensemble des points $M(x;y;z)$ vérifiant $\overrightarrow{KM}=t\overrightarrow{KL}$ pour tout réel *t* ;

Or $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix} a-\frac{2}{5} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ d'où la représentation paramétrique : $\begin{cases} x=\frac{2}{5}+\left(a-\frac{2}{5}\right)t \\ y=t \\ z=1-t \end{cases}, \ t\in\mathbb{R}$

3) *Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si et seulement si $a=\frac{3}{5}$.*

Donner alors les coordonnées de leur point d'intersection.

Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KL}$ ne peuvent être colinéaires au regard des deux dernières coordonnées.

Les droites (IJ) et (KL) sont donc sécantes ou non coplanaires. Les points éventuels communs à ces deux droites vérifient les deux systèmes paramétriques :

$$\begin{cases} 1-k=\frac{2}{5}+\left(a-\frac{2}{5}\right)t \\ \frac{1}{4}+\frac{1}{2}k=t \\ k=1-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-5k=2+(5a-2)t \\ 1+2k=4t \\ k=1-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-5(1-t)=2+(5a-2)t \\ 1+2(1-t)=4t \\ k=1-t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5-5+5t=2+(5a-2)t \\ 1+2-2t=4t \\ k=1-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5t-(5a-2)t=2 \\ 3=6t \\ k=1-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (7-5a)t=2 \\ 3=6t \\ k=1-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{2}{7-5a} \\ \frac{1}{2}=t \\ k=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Le système est équilibré si la première ligne est égale à la deuxième, soit :

$$\frac{2}{7-5a}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 4=7-5a \Leftrightarrow -3=-5a \Leftrightarrow \frac{3}{5}=a$$

Si $a=\frac{3}{5}$, les droites sont sécantes en un point donné par $k=\frac{1}{2}$ et $t=\frac{1}{2}$: $M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.