Fiche 4B - Représentation paramétrique d'un plan

Ex 4B.1 :

L'espace est rapporté à un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

1) Justifier que les points $\mathrm{A}(1;2;-1)$, $\mathrm{B}(4;0;1)$ et $\mathrm{C}(2;1;1)$ définissent un plan.
2) Déterminer une représentation paramétrique du plan (ABC).
3) Le point $\mathrm{M}(5;-4;2)$ appartient-il au plan (ABC) ? Justifier.

Ex 4B.2 :

L'espace est rapporté à un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. On considère les points $\mathrm{A}(1;2;0)$; $\mathrm{B}(-1;2;3)$ et $\mathrm{C}(1;-2;1)$

1) Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ne sont pas colinéaires.
   En déduire qu'il existe un et un seul plan (P) contenant les points A, B et C.
2) Soit $\mathrm{M}(x;y;z)$. Montrer que M ∈ (P) ⇔ il existe deux réels t et t ' tels que $\begin{cases} x = 1-2t \\ y = 2-4t' \\ z = 3t+t' \end{cases}$.

   On dit que le système $\begin{cases} x = 1-2t \\ y = 2-4t' \\ z = 3t+t' \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $t' \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de (P).
3) Soit $\mathrm{D}(3;2;1)$. Montrer que D ∉ (P).

   Soit $\mathrm{E}(-3;6;5)$. Montrer que E ∈ (P). Exprimer le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

Ex 4B.3 :

Soit *d* une droite de l'espace de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1-k \\ y = 2+3k \\ z = -4 \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$

1) Déterminer l'intersection de *d* et du plan $\left(\mathrm{O};\vec{i};\vec{k}\right)$
2) Montrer que *d* est parallèle au plan $\left(\mathrm{O};\vec{i};\vec{j}\right)$
3) Donner une représentation paramétrique de *d*' parallèle à *d* et passant par $A(2;-4;0)$.
4) Indiquer deux droites parallèles à *d* , situées dans le plan $\left(\mathrm{O};\vec{i};\vec{j}\right)$ et en donner une représentation paramétrique

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Ex 4B.1 :

L'espace est rapporté à un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

1) *Justifier que les points* $\mathrm{A}(1;2;-1)$, $\mathrm{B}(4;0;1)$ *et* $\mathrm{C}(2;1;1)$ *définissent un plan.*

Supposons qu'il existe un réel k tel que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{vmatrix}3\\-2\\2\end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{vmatrix}1\\-1\\2\end{vmatrix}$ soient colinéaires :

$$k\times\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}} \Leftrightarrow \begin{cases}3k=1\\-2k=-1\\2k=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=\dfrac{1}{3}\\k=\dfrac{1}{2}\\k=1\end{cases}$$ →ce système est incompatible

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ne sont pas colinéaires, les points A, B et C ne sont pas alignés et peuvent définir un plan.

2) *Déterminer une représentation paramétrique du plan* (ABC).

On peut définir le repère $\left(\mathrm{A};\overrightarrow{\mathrm{AB}};\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$ sur ce plan. Ainsi :

$$(\mathrm{ABC})=\left\{M\,/\,\overrightarrow{\mathrm{AM}}=k\times\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\times\overrightarrow{\mathrm{AC}},k,t\in\mathbb{R}\right\}$$

$$(\mathrm{ABC}):\begin{cases}x=3k+t\\y=-2k-t\ ,\ k,t\in\mathbb{R}\\z=2k+2t\end{cases}$$

3) *Le point* $\mathrm{M}(5;-4;2)$ *appartient-il au plan* (ABC) *? Justifier.*

Testons les coordonnées du point M dans le système précédemment établi :

$$\begin{cases}5=3k+t\\-4=-2k-t\\2=2k+2t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5=3k+(-2k+4)\\t=-2k+4\\2=2k+2(-2k+4)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5-4=k\\t=-2k+4\\2=-2k+8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1=k\\t=-2k+4\\2-6=-2k\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}k=1\\t=-2k+4\\k=\dfrac{-4}{-2}=2\end{cases}$$ →ce système est incompatible, donc : $\mathrm{M}\notin(\mathrm{ABC})$.

Ex 4B.2 :

L'espace est rapporté à un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. On considère les points $\mathrm{A}(1;2;0)$; $\mathrm{B}(-1;2;3)$ et $\mathrm{C}(1;-2;1)$

1) *Justifier que les vecteurs* $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ *et* $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ *ne sont pas colinéaires.*
En déduire qu'il existe un et un seul plan (P) contenant les points A, B et C.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{pmatrix}0\\-4\\1\end{pmatrix}$. Les coordonnées ne sont pas proportionnelles, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires et les points A, B et C ne sont pas alignés et appartiennent à un unique plan (P).

On peut définir le repère $\left(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$ dans ce plan.

2) *Soit* $\mathrm{M}(x;y;z)$. *Montrer que M ∈ (P) ⇔ il existe deux réels t et t ' tels que* $\begin{cases} x=1-2t \\ y=2-4t' \\ z=3t+t' \end{cases}$.

On dit que le système $\begin{cases} x=1-2t \\ y=2-4t' \\ z=3t+t' \end{cases}$ *avec* $t\in\mathbb{R}$ *et* $t'\in\mathbb{R}$ *est une représentation paramétrique de (P).*

Si un point $\mathrm{M}\in(P)$, alors il existe un unique couple de réels t et t' tels que :

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t'\overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-1=-2t \\ y-2=-4t' \\ z=3t+t' \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=1-2t \\ y=2-4t' \\ z=3t+t' \end{cases}, \ t,t'\in\mathbb{R}$$

3) *Soit* $\mathrm{D}(3;2;1)$. *Montrer que D ∉ (P).*

Soit $\mathrm{E}(-3;6;5)$. *Montrer que E ∈ (P). Exprimer le vecteur* $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ *en fonction des vecteurs* $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ *et* $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

Existe-t-il un unique couple de réels t et t' tels que $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t'\overrightarrow{\mathrm{AC}}$?

$$\begin{cases} 3=1-2t \\ 2=2-4t' \\ 1=3t+t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2=-2t \\ 0=-4t' \\ 1=3t+t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1=t \\ 0=t' \\ 1=3t+t' \end{cases} \quad \text{or si } t=-1 \text{ et } t'=0 : 3t+t'=-3$$

La dernière ligne du système n'est pas vérifiée et le système est incompatible : D ∉ (*P*)

Existe-t-il un unique couple de réels t et t' tels que $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t'\overrightarrow{\mathrm{AC}}$?

$$\begin{cases} -3=1-2t \\ 6=2-4t' \\ 5=3t+t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4=-2t \\ 4=-4t' \\ 5=3t+t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2=t \\ -1=t' \\ 5=3t+t' \end{cases} \quad \text{or si } t=2 \text{ et } t'=-1, \text{ on vérifie que } 3t+t'=5$$

La dernière ligne du système est vérifiée et le système est compatible : E ∈ (*P*)

On obtient : $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=2\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

Ex 4B.3 :

Soit d une droite de l'espace de représentation paramétrique : $\begin{cases} x=1-k \\ y=2+3k \\ z=-4 \end{cases}, \ k\in\mathbb{R}$

1) *Déterminer l'intersection de d et du plan* $\left(\mathrm{O};\vec{i};\vec{k}\right)$

L'intersection de la droite *d* d'équation $\begin{cases} x=1-k \\ y=2+3k \\ z=-4 \end{cases}, \ k\in\mathbb{R}$ et du plan $\left(\mathrm{O};\vec{i};\vec{k}\right)$ est le point de la droite dont l'ordonnée est nulle, soit : $2+3k=0 \Leftrightarrow k=-\dfrac{2}{3}$ →on obtient le point $\left(\dfrac{5}{3};0;-4\right)$

2) *Montrer que d est parallèle au plan* $\left(\mathrm{O};\vec{i};\vec{j}\right)$

Sans le produit scalaire :

Le plan $\left(\mathrm{O};\vec{i};\vec{j}\right)$ est caractérisé par l'ensemble des points dont la côte (l'altitude) est égale à 0.

Tous les points de la droite *d* ont une côte égale à -4 donc cette droite ne rencontrera jamais le plan $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ et lui est donc parallèle.

Avec le produit scalaire :

Un vecteur directeur de *d* est $\vec{u}\left(-1;3;0\right)$ et un vecteur normal au plan (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$) est $\vec{k}\left(0;0;1\right)$

Or $\vec{u}.\vec{k}=0$ donc $\vec{u}\perp\vec{k}$ et $\vec{k}$ est aussi un vecteur normal à *d*.

Ainsi la droite *d* est parallèle au plan $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

3) *Donner une représentation paramétrique de d' parallèle à d et passant par* $A\left(2;-4;0\right)$.

La droite *d*' peut posséder le même vecteur directeur que la droite *d* :

$$d' : \begin{cases} x = 2-k \\ y = -4+3k \\ z = 0 \end{cases} ,\ k \in \mathbb{R}$$

4) *Indiquer deux droites parallèles à d , situées dans le plan* $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ *et en donner une représentation paramétrique.*

La droite *d*' est située dans le plan $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ puisque dans sa représentation paramétrique : z = 0

De même, d'' $\begin{cases} x = 3-k \\ y = -1+3k \\ z = 0 \end{cases} ,\ k \in \mathbb{R}$, passant par le point de coordonnées $\left(3;-1;0\right)$,répond à la question ;

ou toute droite de la forme $\begin{cases} x = x_M - k \\ y = y_M + 3k \\ z = 0 \end{cases} ,\ k \in \mathbb{R}$.