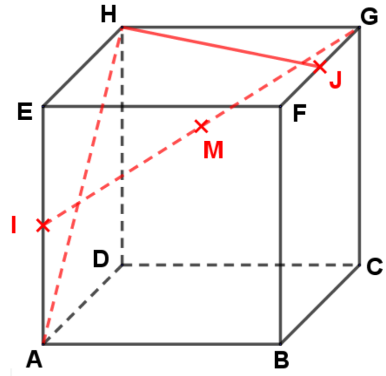
Exercice 5A.1 :

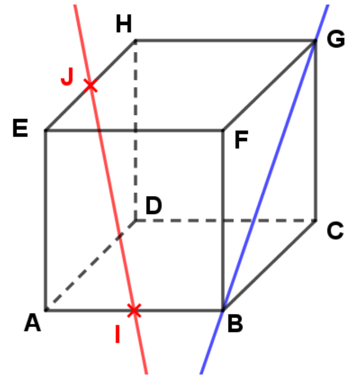


ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.
I et J sont les milieux respectifs des arêtes $[AE]$ et $[FG]$.

M est le milieu du segment $[IG]$.

1) Démontrer que le point M appartient au plan (AHJ).
2) En déduire la position relative de la droite (IG) et du plan (AHJ).

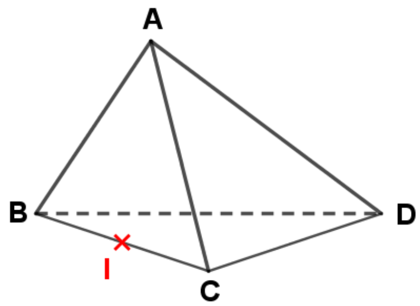
Exercice 5A.2 : *Droites Coplanaires*



ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.
I et J sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$ et $[EH]$.

Les droites (IJ) et (BG) sont-elles coplanaires ? Justifier.

Exercice 5A.3 :



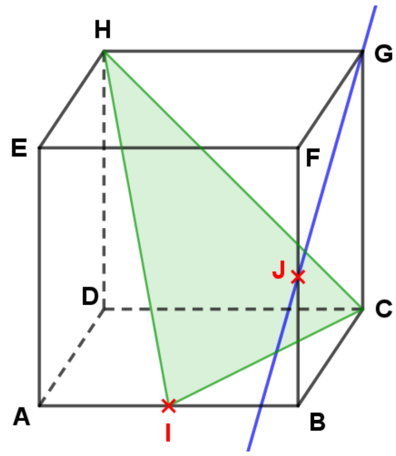
ABCD est un tétraèdre, I est le milieu de $[BC]$.

On considère le point M défini par :

$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BD} - 2\overrightarrow{CD}.$$

1) Démontrer que le point M appartient au plan (ACD) sans utiliser de repère.
2) Refaire la question 1) en utilisant un repère bien choisi.

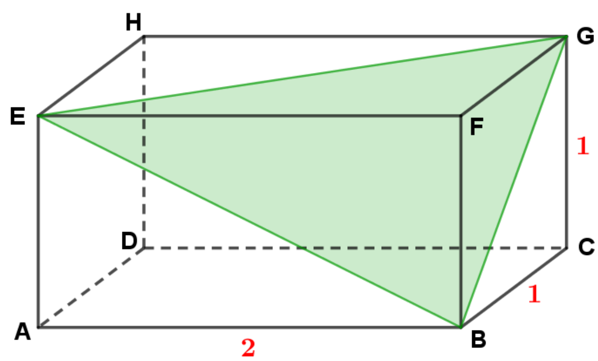
Exercice 5A.4 :



ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.
I et J sont les milieux respectifs des arêtes $[AB]$ et $[BF]$.

1) Démontrer que la droite (GJ) est parallèle au plan (HIC).
2) Refaire la question 1) à l'aide d'un repère judicieusement choisi.

Exercice 5A.5 :



ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle tel que :

$$AB = 2 \quad \text{et} \quad AD = AE = 1.$$

1) Déterminer le volume V du tétraèdre EFGB.
2) Démontrer que le triangle EBG est isocèle.
3) En calculant d'une autre manière le volume V, en déduire la distance de F au plan EBG.

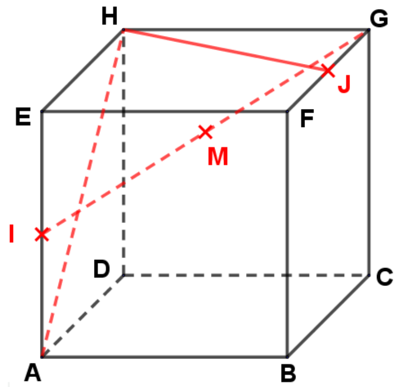
Exercice 5A.1 :

ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.

I et J sont les milieux respectifs des arêtes $[\mathrm{AE}]$ et $[\mathrm{FG}]$.

M est le milieu du segment $[\mathrm{IG}]$.

1) Démontrer que le point M appartient au plan (AHJ).
2) En déduire la position relative de la droite (IG) et du plan (AHJ).



1) Première méthode : avec des coordonnées dans le repère $\left(\mathrm{A},\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AD}},\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

Quelques coordonnées de points :

$$\mathrm{E}(0;0;1)\ ,\ \mathrm{F}(1;0;1)\ ,\ \mathrm{H}(0;1;1)\ ,\ \mathrm{G}(1;1;1)\ ,\ \mathrm{I}\left(0;0;\frac{1}{2}\right)\ ,\ \mathrm{J}\left(1;\frac{1}{2};1\right),$$

$$\mathrm{M}\left(\frac{x_{\mathrm{I}}+x_{\mathrm{G}}}{2};\frac{y_{\mathrm{I}}+y_{\mathrm{G}}}{2};\frac{z_{\mathrm{I}}+z_{\mathrm{G}}}{2}\right)\ \text{soit : }\mathrm{M}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right).$$

Le plan (AHJ) est l'ensemble des points P vérifiant : $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AH}}+t\overrightarrow{\mathrm{AJ}}$.

Une équation paramétrique du plan (AHJ) est :

$$\begin{cases} x=t \\ y=k+\dfrac{1}{2}t \\ z=k+t \end{cases},k,t\in\mathbb{R}.$$

Il suffit de tester les coordonnées du point M :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}=t \\ \dfrac{1}{2}=k+\dfrac{1}{2}t \\ \dfrac{3}{4}=k+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\dfrac{1}{2} \\ k=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}t=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4} \\ k=t-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Le système est compatible, le point M appartient au plan (AHJ).

2) Deuxième méthode : avec les vecteurs

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{AI}}+\overrightarrow{\mathrm{AG}}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AI}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{\mathrm{AH}}+\overrightarrow{\mathrm{HE}}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{AJ}}+\overrightarrow{\mathrm{JG}}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AH}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{HE}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AJ}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{JG}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AH}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{GF}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AJ}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{FG}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AH}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AJ}}$$

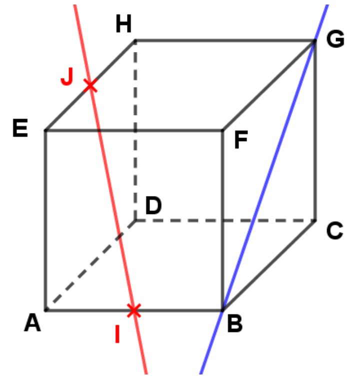
$\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ s'exprime par une combinaison linéaire de deux vecteurs non colinéaires du plan (AHJ) donc le point M appartient au plan (AHJ).

Exercice 5A.2 : *Droites Coplanaires*

ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.

I et J sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$ *et* $[EH]$.

Les droites (IJ) *et* (BG) *sont-elles coplanaires ? Justifier.*



Sans repère :

Le plan (BGJ) peut être défini par le petit repère $\left(G, \overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GJ}\right)$. Ainsi :

$$\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{JG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GJ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$$

Or le point J n'appartient pas un plan (BGH) donc le point H n'appartient pas au plan (BGJ).

Le vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$ ne peut pas appartenir au plan (BGJ) et les droites (IJ) et (BG) ne sont pas coplanaires.

Avec un repère : en cherchant si les droites sont sécantes

Dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$:

$$B(1;0;0)\ ,\ I\left(\frac{1}{2};0;0\right)\ ,\ G(1;1;1)\ ,\ J\left(0;\frac{1}{2};1\right)$$

Les droites (IJ) et (BG) ne sont clairement pas parallèles, admettant respectivement comme vecteurs directeurs :

$$\overrightarrow{IJ}\begin{vmatrix} -0,5 \\ 0,5 \\ 1 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BG}\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

D'où les représentations paramétriques suivantes :

$$(IJ) = \left\{M \,/\, \overrightarrow{IM} = k \times \overrightarrow{IJ}, k \in \mathbb{R}\right\} : \begin{cases} x = 0,5 - 0,5k \\ y = 0,5k \\ z = k \end{cases} ,\ k \in \mathbb{R}$$

$$(BG) = \left\{M \,/\, \overrightarrow{BM} = t \times \overrightarrow{BG}, t \in \mathbb{R}\right\} : \begin{cases} x = 1 \\ y = t,\ t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

Un point d'intersection de ces deux droites vérifierait les deux équations paramétriques :

$$\begin{cases} 0,5 - 0,5k = 1 \\ 0,5k = t \\ k = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,5 - 0,5t = 1 \\ 0,5t = t \\ k = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -0,5t = 1 - 0,5 \\ 0,5t = 0 \\ k = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{0,5}{-0,5} = -1 \\ t = 0 \\ k = t \end{cases}$$

Le système est incompatible, les droites (IJ) et (BG) ne sont ni sécantes, ni parallèles, et ne sont donc pas coplanaires.

Avec un repère : en cherchant si le point I appartient au plan (BGJ)

Dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$:

$$B(1;0;0)\ ,\ I\left(\frac{1}{2};0;0\right)\ ,\ G(1;1;1)\ ,\ J\left(0;\frac{1}{2};1\right)$$

Le plan (BGJ) peut être défini par le repère $\left(\mathrm{B};\overrightarrow{\mathrm{BG}},\overrightarrow{\mathrm{BJ}}\right)$ avec $\overrightarrow{\mathrm{BG}}\begin{vmatrix}0\\1\\1\end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BJ}}\begin{vmatrix}-1\\ \frac{1}{2}\\1\end{vmatrix}$.

Ainsi : $(\mathrm{BGJ})=\left\{M\,/\,\overrightarrow{\mathrm{BM}}=k\times\overrightarrow{\mathrm{BG}}+t\times\overrightarrow{\mathrm{BJ}},k,t\in\mathbb{R}\right\}:\begin{cases}x=-t\\ y=k+\frac{t}{2}\\ z=k+t\end{cases},\ k,t\in\mathbb{R}.$

On peut tester les coordonnées du point $\mathrm{I}\left(\frac{1}{2};0;0\right)$:

$$\begin{cases}\frac{1}{2}=-t\\ 0=k+\frac{t}{2}\\ 0=k+t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-\frac{1}{2}\\ 0=k+\frac{-\frac{1}{2}}{2}\\ 0=k-\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-\frac{1}{2}\\ k=\frac{1}{4}\\ k=\frac{1}{2}\end{cases}$$ → le système est incompatible.

Le point I n'appartient pas au plan (BGJ) et les droites (IJ) et (BG) ne sont pas coplanaires.

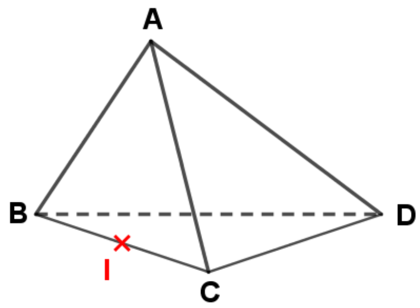
http://www.jaicompris.com/lycee/math/espace/droite-plan.php

Exercice 5A.3 :

ABCD est un tétraèdre, I est le milieu de $[\mathrm{BC}]$.

On considère le point M défini par :

$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=2\overrightarrow{\mathrm{AI}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}-2\overrightarrow{\mathrm{CD}}$.



1) *Démontrer que le point M appartient au plan* (ACD) *sans utiliser de repère.*

L'objectif est d'exprimer le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ uniquement en fonction des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$.

I étant le milieu de $[\mathrm{BC}]$, $\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AM}}&=2\overrightarrow{\mathrm{AI}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}-2\overrightarrow{\mathrm{CD}}\\&=2\times\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)+\left(\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)-2\left(\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)\\&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}-2\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\&=3\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}\end{aligned}$$

2) *Refaire la question 1) en utilisant un repère bien choisi.*

Dans le repère $\left(\mathrm{A},\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}},\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$:

$\mathrm{B}(1;0;0)$, $\mathrm{C}(0;1;0)$, $\mathrm{D}(0;0;1)$, $\mathrm{I}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$, $\mathrm{M}(x;y;z)$

Ainsi : $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=2\overrightarrow{\mathrm{AI}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}-2\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

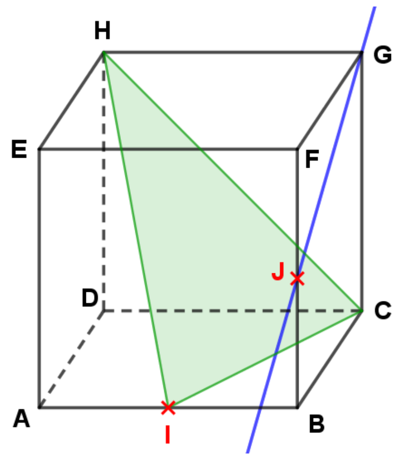
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-0=2\times\left(\dfrac{1}{2}-0\right)+(0-1)-2\times(0-0) \\ y-0=2\times\left(\dfrac{1}{2}-0\right)+(0-0)-2\times(0-1) \\ z-0=2\times(0-0)+(1-0)-2\times(1-0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-1=0 \\ y=1+2=3 \\ z=1-2=-1 \end{cases}$$

Soit : $\overrightarrow{AM}=0\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$ → le point M appartient bien au plan (ACD).

Exercice 5A.4 :

ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.

I et J sont les milieux respectifs des arêtes $[AB]$ *et* $[BF]$.



1) *Démontrer que la droite* (GJ) *est parallèle au plan* (HIC).

Cela revient à exprimer le vecteur directeur $\overrightarrow{GJ}$ en fonction de deux vecteurs non colinéaires du plan (HIC) :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GJ} &= \overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BJ} \\ &= \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{CI}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BF} \\ &= \overrightarrow{HC}+\overrightarrow{CI}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BF} \\ &= \overrightarrow{HC}+\overrightarrow{CI}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BE} \\ &= \overrightarrow{HC}+\overrightarrow{CI}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CH} \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{CI} \end{aligned}$$

On est parvenu à exprimer $\overrightarrow{GJ}$ dans le repère $\left(C,\overrightarrow{CH},\overrightarrow{CI}\right)$.

La droite (GJ) est parallèle au plan (HIC).

2) *Refaire la question 1) à l'aide d'un repère judicieusement choisi.*

Dans le repère $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$:

$$B(1;0;0)\ ,\ I\left(\frac{1}{2};0;0\right)\ ,\ C(1;1;0)\ ,\ G(1;1;1)\ ,\ H(0;1;1)\ ,\ J\left(1;0;\frac{1}{2}\right)$$

On va à nouveau exprimer $\overrightarrow{GJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{CI}$:

$$\overrightarrow{GJ}\begin{vmatrix}1-1\\0-1\\\frac{1}{2}-1\end{vmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{GJ}\begin{vmatrix}0\\-1\\-\frac{1}{2}\end{vmatrix}\quad,\quad \overrightarrow{CH}\begin{vmatrix}0-1\\1-1\\1-0\end{vmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{CH}\begin{vmatrix}-1\\0\\1\end{vmatrix}\quad \text{et}\quad \overrightarrow{CI}\begin{vmatrix}\frac{1}{2}-1\\0-1\\0-0\end{vmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{CI}\begin{vmatrix}-\frac{1}{2}\\-1\\0\end{vmatrix}$$

Si la droite (GJ) est parallèle au plan (HIC), il existe un couple de réels (a,b) tels que :

$$\overrightarrow{GJ} = a \times \overrightarrow{CH} + b \times \overrightarrow{CI} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -a - \frac{1}{2}b \\ -1 = 0 - b \\ -\frac{1}{2} = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -a - \frac{1}{2} \times 1 \\ b = 1 \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 1 \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Le système est compatible, et on obtient :

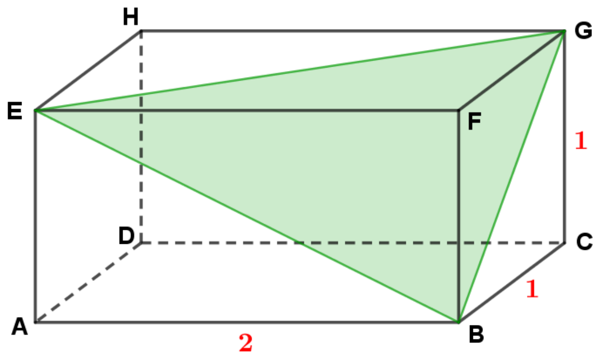
$$\overrightarrow{GJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{CI}$$

La droite (GJ) est parallèle au plan (HIC).

Exercice 5A.5 :

ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle tel que :

$AB = 2$ *et* $AD = AE = 1$.



1) *Déterminer le volume V du tétraèdre EFGB.*

En utilisant la base EFG et la hauteur $[BF]$, on obtient :

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{BEG} \times BF = \frac{\frac{2 \times 1}{2} \times 1}{3} = \frac{1}{3} \text{ u.v.}$$

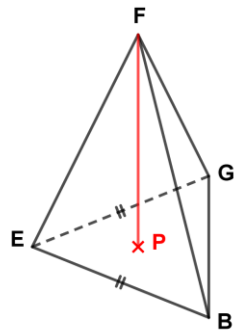
2) *Démontrer que le triangle EBG est isocèle.*

$$BE^2 = 2^2 + 1^2 = 5 \quad \text{et} \quad EG^2 = 2^2 + 1^2 = 5 = BE^2$$

Le triangle BEG est isocèle en E.

3) *En calculant d'une autre manière le volume V, en déduire la distance de F au plan EBG.*

La hauteur est déterminée par la projection orthogonale du point F sur la base BEG.



Soit P le projeté orthogonal de F sur le plan BEG. Ainsi :

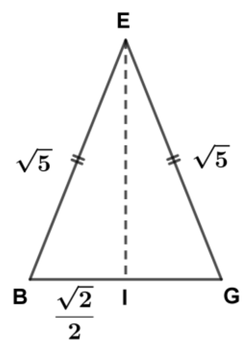
$$V = \frac{\mathcal{A}_{BEG} \times FP}{3}$$

La longueur BG se calcule aisément avec le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle BCG :

$$BG = \sqrt{2}$$

Soit I le milieu du segment $[BG]$. Ainsi :

$$BI = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle BEI donne :

$$EI^2 = 5 - \frac{1}{2} \quad \text{, soit : } \quad EI = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

On peut calculer l'aire de la base BEG :

$$\frac{BG \times EI}{2} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{3}{2}$$

Par identification des deux calculs du volume V, on obtient :

$$\frac{\frac{3}{2} \times FP}{3} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{2} \times FP = 1 \Leftrightarrow FP = \frac{2}{3}$$

La distance de F au plan EBG est égale à $\frac{2}{3}$.