Exercice 5B.1 :

On considère la droite (d) d'équation paramétrique $\begin{cases} x = 3+k \\ y = 2+2k \\ z = -1+3k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$ et le plan (P) d'équation paramétrique $\begin{cases} x = 2t-u+4 \\ y = t+u+1 \\ z = -t+2u-1 \end{cases}$, $t,u \in \mathbb{R}$

Déterminer le point d'intersection de la droite (d) et du plan (P).

Exercice 5B.2 :

On considère la droite (d) d'équation paramétrique $\begin{cases} x = 1+k \\ y = 2-4k \\ z = 2-k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$ et le plan (P) d'équation paramétrique $\begin{cases} x = t+2u-3 \\ y = -t+3u+2 \\ z = 2t+4u-1 \end{cases}$, $t,u \in \mathbb{R}$

Déterminer le point d'intersection de la droite (d) et du plan (P).

Situations où la droite est parallèle au plan

Exercice 5B.3 :

On considère la droite (d) d'équation paramétrique $\begin{cases} x = 2+7k \\ y = 3+2k \\ z = 1+k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$ et le plan (P) d'équation paramétrique $\begin{cases} x = 1+t+u \\ y = 2t-u \\ z = 2-t+u \end{cases}$, $t,u \in \mathbb{R}$

Déterminer le point d'intersection de la droite (d) et du plan (P).

Exercice 5B.4 :

On considère la droite (d) d'équation paramétrique $\begin{cases} x = -4+7k \\ y = 2+2k \\ z = -1+k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$ et le plan (P) d'équation paramétrique $\begin{cases} x = 1+t+u \\ y = 2t-u \\ z = 2-t+u \end{cases}$, $t,u \in \mathbb{R}$

Déterminer le point d'intersection de la droite (d) et du plan (P).

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 5B.1 :

On considère la droite (d) *d'équation paramétrique* $\begin{cases} x=3+k \\ y=2+2k \\ z=-1+3k \end{cases}$, $k\in\mathbb{R}$ *et le plan* (P) *d'équation paramétrique* $\begin{cases} x=2t-u+4 \\ y=t+u+1 \\ z=-t+2u-1 \end{cases}$, $t,u\in\mathbb{R}$. *Déterminer le point d'intersection de la droite* (d) *et du plan* (P).

On cherche un point $\mathrm{I}(x_{\mathrm{I}};y_{\mathrm{I}};z_{\mathrm{I}})$, s'il existe, appartenant à la fois à la droite (d) et au plan (P).

→ses coordonnées vérifient les deux équations paramétriques :

$$\begin{cases} 3+k=2t-u+4 \\ 2+2k=t+u+1 \\ -1+3k=-t+2u-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=2t-u+1 \\ 2+2(2t-u+1)=t+u+1 \\ -1+3(2t-u+1)=-t+2u-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=2t-u+1 \\ 2+4t-2u+2=t+u+1 \\ -1+6t-3u+3=-t+2u-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k=2t-u+1 \\ 3t-3u=-3 \\ 7t-5u=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=2t-u+1 \\ t-u=-1 \\ 7t-5u=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=2t-u+1 \\ t=u-1 \\ 7(u-1)-5u=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=2t-u+1 \\ t=u-1 \\ 7u-7-5u=-3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k=2t-u+1 \\ t=u-1 \\ 2u=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=2t-u+1 \\ t=2-1=1 \\ u=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=2\times1-2+1=1 \\ t=2-1=1 \\ u=2 \end{cases}$$

On reporte les valeurs obtenues dans chaque système :

Pour $k=1$: $\begin{cases} x=3+1=4 \\ y=2+2\times1=4 \\ z=-1+3\times1=2 \end{cases}$ et pour $t=1$ et $u=2$: $\begin{cases} x=2\times1-2+4=4 \\ y=1+2+1=4 \\ z=-1+2\times2-1=2 \end{cases}$

On obtient bien le point d'intersection I de coordonnées $\mathrm{I}(4;4;2)$.

Exercice 5B.2 :

On considère la droite (d) *d'équation paramétrique* $\begin{cases} x=1+k \\ y=2-4k \\ z=2-k \end{cases}$, $k\in\mathbb{R}$ *et le plan* (P) *d'équation paramétrique* $\begin{cases} x=t+2u-3 \\ y=-t+3u+2 \\ z=2t+4u-1 \end{cases}$, $t,u\in\mathbb{R}$. *Déterminer le point d'intersection de la droite* (d) *et du plan* (P).

On cherche un point $\mathrm{I}(x_{\mathrm{I}};y_{\mathrm{I}};z_{\mathrm{I}})$, s'il existe, appartenant à la fois à la droite (d) et au plan (P).

→ses coordonnées vérifient les deux équations paramétriques :

$$\begin{cases} 1+k=t+2u-3 \\ 2-4k=-t+3u+2 \\ 2-k=2t+4u-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=t+2u-4 \\ 2-4(t+2u-4)=-t+3u+2 \\ 2-(t+2u-4)=2t+4u-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=t+2u-4 \\ 2-4t-8u+16=-t+3u+2 \\ 2-t-2u+4=2t+4u-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k=t+2u-4 \\ -3t-11u=-16 \\ -3t-6u=-7 \end{cases} \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3-L_2 \end{vmatrix} \begin{cases} k=t+2u-4 \\ -3t-11u=-16 \\ -6u+11u=-7+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=t+2u-4 \\ -3t-11u=-16 \\ 5u=9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k=t+2u-4 \\ -3t=11\times\frac{9}{5}-16=\frac{19}{5} \\ u=\frac{9}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-\frac{19}{15}+2\times\frac{9}{5}-4=-\frac{19}{15}+\frac{54}{15}-\frac{60}{15}=-\frac{25}{15}=-\frac{5}{3} \\ t=-\frac{1}{3}\times\frac{19}{5}=-\frac{19}{15} \\ u=\frac{9}{5} \end{cases}$$

On reporte les valeurs obtenues dans chaque système :

Pour $k=-\frac{5}{3}$: $\begin{cases} x=1-\frac{5}{3}=-\frac{2}{3} \\ y=2-4\times\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{26}{3} \\ z=2-\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{11}{3} \end{cases}$

et pour $t=-\frac{19}{15}$ et $u=\frac{9}{5}$: $\begin{cases} x=-\frac{19}{15}+2\times\frac{9}{5}-3=-\frac{19}{15}+\frac{54}{15}-\frac{45}{15}=-\frac{10}{15}=-\frac{2}{3} \\ y=-\left(-\frac{19}{15}\right)+3\times\frac{9}{5}+2=\frac{19}{15}+\frac{81}{15}+\frac{30}{15}=\frac{130}{15}=\frac{26}{3} \\ z=2\times\left(-\frac{19}{15}\right)+4\times\frac{9}{5}-1=-\frac{38}{15}+\frac{108}{15}-\frac{15}{15}=\frac{55}{15}=\frac{11}{3} \end{cases}$

On obtient bien le point d'intersection I de coordonnées $\mathrm{I}\left(-\frac{2}{3};\frac{26}{3};\frac{11}{3}\right)$.

Situations où la droite est parallèle au plan

Exercice 5B.3 :

On considère la droite (d) d'équation paramétrique $\begin{cases} x=2+7k \\ y=3+2k \\ z=1+k \end{cases}$, $k\in\mathbb{R}$ *et le plan (P) d'équation paramétrique* $\begin{cases} x=1+t+u \\ y=2t-u \\ z=2-t+u \end{cases}$, $t,u\in\mathbb{R}$. *Déterminer le point d'intersection de la droite (d) et du plan (P).*

Le plan (P) peut être caractérisé par les vecteurs $\vec{u}\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix}$ et $\vec{v}\begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}$ non colinéaires.

La droite (d) admet pour vecteur directeur $\vec{w}\begin{vmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$.

Peut-on trouver deux réels *a* et *b* tels que : $\vec{w}=a\times\vec{u}+a\times\vec{v}$?

Supposons qu'il existe un réel k tel que : $\vec{v}=k\times\vec{u}$. Alors :

$$\begin{cases} a+b=7 \\ 2a-b=2 \\ -a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=7-b \\ 2(7-b)-b=2 \\ -(7-b)+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=7-b \\ 14-2b-b=2 \\ -7+b+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=7-b \\ -3b=2-14 \\ 2b=1+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=7-4=3 \\ b=\dfrac{-12}{-3}=4 \\ b=\dfrac{8}{2}=4 \end{cases}.$$

Ce système est compatible donc : $\vec{w}=3\vec{u}+4\vec{v}$ donc la droite est parallèle au plan.

Le point $\mathrm{A}(2;3;1)$ appartient à la droite (d), s'il appartient également au plan (P), alors la droite est incluse dans le plan, sinon la droite (d) est extérieure au plan (P).

$$\begin{cases} x_{\mathrm{A}}=1+t+u \\ y_{\mathrm{A}}=2t-u \\ z_{\mathrm{A}}=2-t+u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+t+u=2 \\ 2t-u=3 \\ 2-t+u=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2-1-t=1-t \\ 2t-(1-t)=3 \\ 2-t+(1-t)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1-t \\ 2t-1+t=3 \\ 2-t+1-t=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u=1-t \\ 3t=3+1 \\ -2t=1-2-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1-t \\ t=\dfrac{4}{3} \\ t=\dfrac{-2}{-2}=1 \end{cases}$$

Ce système n'est pas compatible donc le point A n'appartient pas au plan (P).

$$(P)\cap(d)=\varnothing.$$

Si l'on n'étudie pas le parallélisme au préalable, voici ce que l'on obtient :

$$\begin{cases} 1+t+u=2+7k \\ 2t-u=3+2k \\ 2-t+u=1+k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+t+(k+t-1)=2+7k \\ 2t-(k+t-1)=3+2k \\ u=1+k+t-2=k+t-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+t+k+t-1=2+7k \\ 2t-k-t+1=3+2k \\ u=k+t-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t+k-7k=2 \\ t-k-2k=3-1 \\ u=k+t-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t-6k=2 \\ t-3k=2 \\ u=k+t-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(2+3k)-6k=2 \\ t=2+3k \\ u=k+t-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4+6k-6k=2 \\ t=2+3k \\ u=k+t-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4=2 \\ t=2+3k \\ u=k+t-1 \end{cases}$$

Ce système est incompatible, il n'y a aucun point d'intersection entre la droite (d) et le plan (P).

Exercice 5B.4 :

On considère la droite (d) d'équation paramétrique $\begin{cases} x=-4+7k \\ y=2+2k \\ z=-1+k \end{cases}$ *, $k\in\mathbb{R}$ et le plan (P) d'équation paramétrique* $\begin{cases} x=1+t+u \\ y=2t-u \\ z=2-t+u \end{cases}$ *, $t,u\in\mathbb{R}$. Déterminer le point d'intersection de la droite (d) et du plan (P).*

On a montré à l'exercice 3 que $\vec{w}=3\vec{u}+4\vec{v}$ donc la droite est parallèle au plan.

Le point $A(-4;2;-1)$ appartient à la droite (d), s'il appartient également au plan (P), alors la droite est incluse dans le plan, sinon la droite (d) est extérieure au plan (P).

$$\begin{cases}1+t+u=-4\\2t-u=2\\2-t+u=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=-4-t-1=-5-t\\2t-(-5-t)=2\\2-t+(-5-t)=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=-5-t\\2t+5+t=2\\2-t-5-t=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=-5-t\\3t=2-5\\-2t=-1+3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u=-5-(-1)=4\\t=\dfrac{-3}{3}=-1\\t=\dfrac{-2}{2}=-1\end{cases}$$

Ce système est compatible, le point $A(-4;2;-1)$ appartient au plan (P) et la droite (d) est incluse dans le plan (P):

$$(P)\cap(d)=(d)$$

Si l'on n'étudie pas le parallélisme au préalable, voici ce que l'on obtient :

$$\begin{cases}1+t+u=-4+7k\\2t-u=2+2k\\2-t+u=-1+k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+t+(k+t-3)=-4+7k\\2t-(k+t-3)=2+2k\\u=-1+k-2+t=k+t-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+t+k+t-3=-4+7k\\2t-k-t+3=2+2k\\u=k+t-3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}k+2t-7k=-4+2\\t-k-2k=2-3\\u=k+t-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2t-6k=-2\\t-3k=-1\\u=k+t-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(-1+3k)-6k=-2\\t=-1+3k\\u=k+t-3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2+6k-6k=-2\\t=-1+3k\\u=k+t-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2=-2\\t=-1+3k\\u=k+t-3\end{cases}$$

Ce système est compatible pour toute valeur de k, induisant les variables t puis u.

Ainsi : $(P)\cap(d)=(d)$