Exercices à prise d'initiative en Géométrie

Exercice 1 :

ABCDEFGH est un cube, M est un point de l'arête $[EH]$ et N est un point de l'arête $[AB]$. Soit K le milieu de $[MN]$.

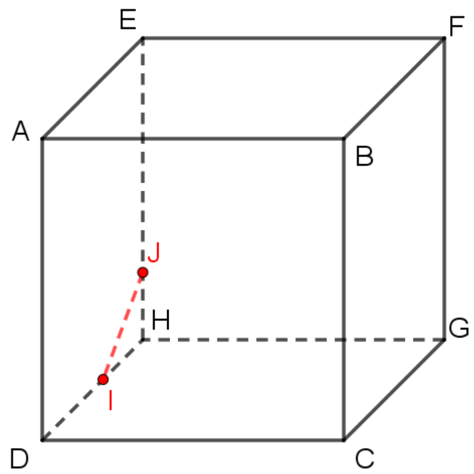
Chercher le lieu S des points K quand M et N décrivent respectivement $[EH]$ et $[AB]$.

Exercice 2 :

« Dans un tétraèdre ABCD trirectangle en A, le carré de l'aire de la face BCD est égal à la somme des carrés des aires des trois autres faces. »
Ce théorème est nommé « théorème de Pythagore dans l'espace » : expliquer ce nom et démontrer ce théorème.

Exercice 3 :

Comment tracer simplement une parallèle à la droite (IJ) sur la face BCGF ?



Exercice 4 :

Soit ABCD un tétraèdre. Le point J est le milieu du segment $[AD]$, K est le milieu du segment $[BC]$, G est le centre de gravité du triangle ABC et le point E est tel que BDCE est un parallélogramme.

1. Décomposer les vecteurs $\overrightarrow{JE}$ et $\overrightarrow{JG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$.
2. Les points J, G et E sont-ils alignés ?

Exercice 5:

Soit ABCD un tétraèdre. I est le point défini par $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$ et J est le point défini par $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$.

K et L sont les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[BD]$.

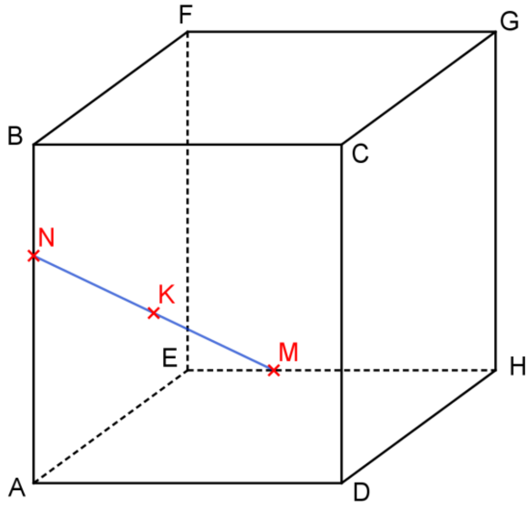
Les droites (KI), (LJ) et (AB) sont-elles concourantes?

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 1 :

ABCDEFGH est un cube, M est un point de l'arête [EH] et N est un point de l'arête [AB]. Soit K le milieu de [MN].
Chercher le lieu S des points K quand M et N décrivent respectivement [EH] et [AB].

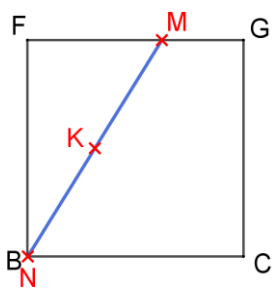
Dans un premier temps, faire un schéma (grand et soigné) :

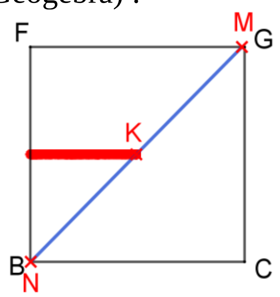


→déjà, il semble que K milieu de $[MN]$ appartient à un plan parallèle à ABCD et coupant le cube en deux pavés droits identiques.

Grand principe en géométrie : il faut passer de la 3D à la 2D :

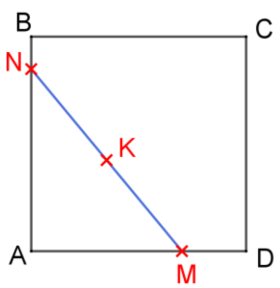
Vue d'en-dessus (sans et avec la trace sur Geogebra) :

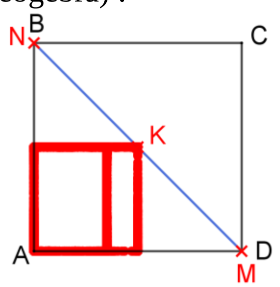




Il semble bien que K est dans un plan vertical avec pour limite visuelle le milieu de $[BG]$.

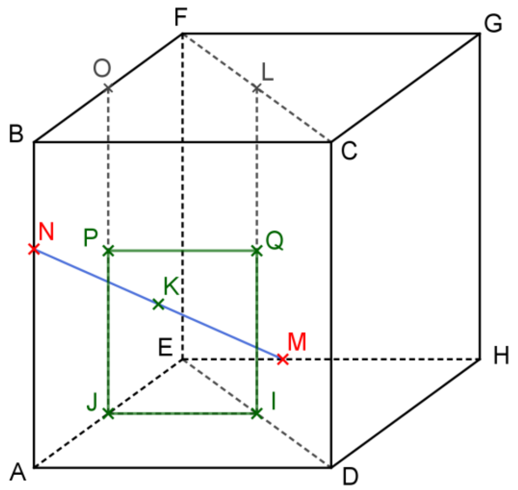
Vue de devant (sans et avec la trace sur Geogebra) :





Dans le plan vertical précédent, K semble décrire un carré.
Ce que nous allons maintenant démontrer suite à cette indispensable étude préliminaire.

Nous allons montrer que le point H appartient au carré IJPQ où I est le milieu de $[ED]$, J est le milieu de $[AE]$, P est le centre de la face ABFE et Q est le centre du cube.



Dans le repère $\left(A\,,\,\overrightarrow{AD}\,,\,\overrightarrow{AE}\,,\,\overrightarrow{AB}\right)$, les coordonnées des points sont :

$$I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)\ ,\ J\left(0;\frac{1}{2};0\right)\ ,\ P\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right),\ Q\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right),\ M(t;1;0)\ \text{et}\ N(0;0;k)\ \text{avec}\ t\in[0;1]\ \text{et}\ k\in[0;1]$$

K est le milieu de $[MN]$ donc $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}\right)$ ainsi : $K\left(\frac{t}{2};\frac{1}{2};\frac{k}{2}\right)$.

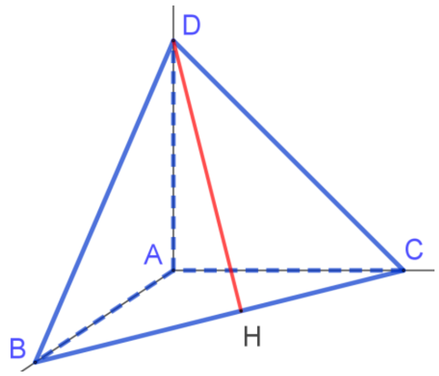
On obtient ainsi : $\overrightarrow{JK}\left(\frac{t}{2};0,\frac{k}{2}\right)$, on va montrer que $\overrightarrow{JK}$ est une combinaison des vecteurs $\overrightarrow{JI}$ et $\overrightarrow{JP}$:

$$\overrightarrow{JI}\left(\frac{1}{2};0,0\right)\ \text{et}\ \overrightarrow{JP}\left(0;0,\frac{1}{2}\right)\ \text{ainsi : } \overrightarrow{JK}=t\overrightarrow{JI}+k\overrightarrow{JP}\ \text{avec}\ t\in[0;1]\ \text{et}\ k\in[0;1]$$

Le point K appartient au carré IJPQ.

Exercice 2 :

« Dans un tétraèdre ABCD trirectangle en A, le carré de l'aire de la face BCD est égal à la somme des carrés des aires des trois autres faces. »
Ce théorème est nommé « théorème de Pythagore dans l'espace » : expliquer ce nom et démontrer ce théorème.



Dans le repère $\left(A\,,\,\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AC}\,,\,\overrightarrow{AD}\right)$, les coordonnées des points sont :

$$B(1;0;0)\ ,\ C(0;1;0)\ ,\ D(0;0;1).$$

L'aire de la face ABC est égale à : $\dfrac{AB\times AC}{2}=\dfrac{1}{2}$

L'aire de la face ABD est égale à : $\dfrac{AB\times AD}{2}=\dfrac{1}{2}$

L'aire de la face ACD est égale à : $\dfrac{AC\times AD}{2}=\dfrac{1}{2}$

Pour calculer la longueur DH, il faut d'abord déterminer une équation paramétrique de la droite (BC) :

$$\left\{M\,(x;y;z)/\overrightarrow{BM}=k\times\overrightarrow{BC}\ ,k\in\mathbb{R}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x-1=k\times(-1)\\ y=k\times 1\\ z=0\end{array}\right.,k\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=1-k\\ y=k\\ z=0\end{array}\right.,k\in\mathbb{R}$$

Soit H le projeté orthogonal de D sur (BC) avec $\overrightarrow{BC}\left|\begin{array}{l}-1\\ 1\\ 0\end{array}\right.$ et $\overrightarrow{DH}\left|\begin{array}{l}x_H\\ y_H\\ z_H-1\end{array}\right.$:

$$\mathrm{H}\in(\mathrm{BC}) \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{BC}}.\overrightarrow{\mathrm{DH}}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\mathrm{H}}=1-k \\ y_{\mathrm{H}}=k \\ z_{\mathrm{H}}=0 \\ -x_{\mathrm{H}}+y_{\mathrm{H}}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\mathrm{H}}=1-k \\ y_{\mathrm{H}}=k \\ z_{\mathrm{H}}=0 \\ -(1-k)+k=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\mathrm{H}}=1-k \\ y_{\mathrm{H}}=k \\ z_{\mathrm{H}}=0 \\ 2k-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\mathrm{H}}=\frac{1}{2} \\ y_{\mathrm{H}}=\frac{1}{2} \\ z_{\mathrm{H}}=0 \\ k=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Soit $\mathrm{H}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$.

Ainsi : $\mathrm{BC}=\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{2}$ et $\mathrm{DH}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+(0-1)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}=\sqrt{\frac{6}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

L'aire de la face BCD est égale à : $\dfrac{\mathrm{BC}\times\mathrm{DH}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}}{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{12}}{4}=\dfrac{\sqrt{4}\times\sqrt{3}}{4}=\dfrac{2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ainsi :

$$\mathrm{A_{BCD}}^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

$$\mathrm{A_{ABC}}^2+\mathrm{A_{ABD}}^2+\mathrm{A_{ACD}}^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=\mathrm{A_{BCD}}^2$$

Le théorème de Pythagore dans l'espace est démontré.

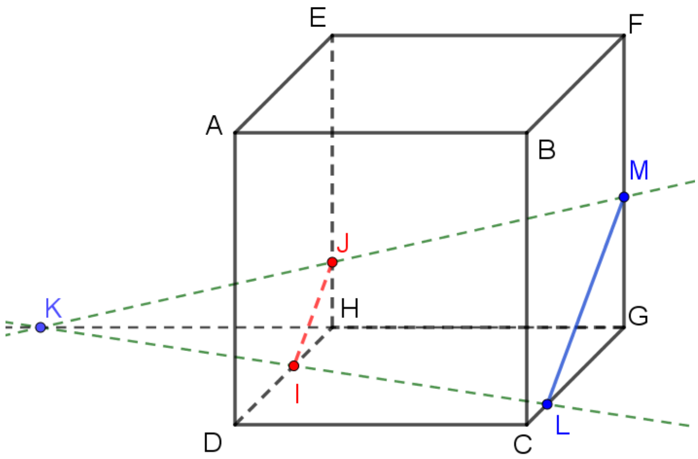
Exercice 3 :

Comment tracer simplement une parallèle à la droite (IJ) *sur la face BCGF ?*

Un plan coupe deux droites parallèles en deux droites parallèles.

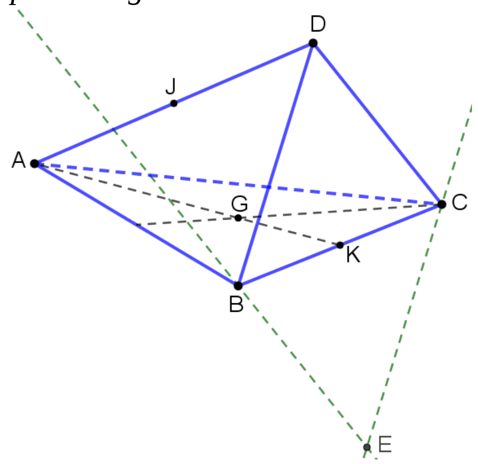
Nous devons créer un plan (IJK) qui coupera les deux faces opposées.

Si nous souhaitons que le segment parallèle crée ait pour extrémités deux points des segments $[\mathrm{CG}]$ et $[\mathrm{FG}]$, nous devons positionner le point K sur la demi droite $[\mathrm{GH})$, au-delà du point H : on obtient le segment $[\mathrm{LM}]$.



Exercice 4 :

Soit ABCD un tétraèdre. Le point J est le milieu du segment $[AD]$, K est le milieu du segment $[BC]$, G est le centre de gravité du triangle ABC et le point E est tel que BDCE est un parallélogramme.



1. *Décomposer les vecteurs $\overrightarrow{JE}$ et $\overrightarrow{JG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$.*

$$\overrightarrow{JE}=\overrightarrow{JD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}$$

K est le milieu des deux diagonales $[BC]$ et $[DE]$ donc :

$$\overrightarrow{DK}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\right)$$

Ainsi : $\overrightarrow{JG}=\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DK}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}-\frac{2}{3}\overrightarrow{DA}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\right)$$

$$=-\frac{1}{6}\overrightarrow{DA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$$

2. *Les points J, G et E sont-ils alignés ?*

On remarque que :

$$3\overrightarrow{JG}=3\left(-\frac{1}{6}\overrightarrow{DA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}\right)=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{JE}$$

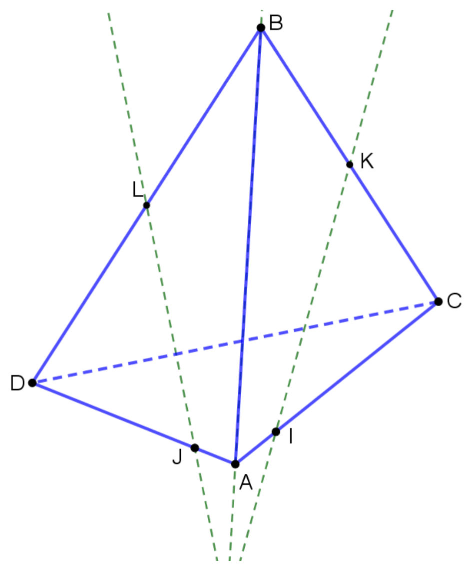
Les vecteurs $\overrightarrow{JE}$ et $\overrightarrow{JG}$ sont colinéaires, les points J, G et E sont alignés.

Exercice 5:

Soit ABCD un tétraèdre. I est le point défini par $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$ et J est le point défini par $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$.

K et L sont les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[BD]$.

Les droites (KI), (LJ) et (AB) sont-elles concourantes ?



Dans le repère $\left(A\,,\,\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AC}\,,\,\overrightarrow{AD}\right)$, les coordonnées des points sont :

$B(1;0;0)$, $C(0;1;0)$, $D(0;0;1)$,

$I\left(0;\frac{1}{5};0\right)$, $J\left(0;0;\frac{1}{5}\right)$, $K\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$ et $L\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$.

Un vecteur directeur de la droite (KI) est :

$\overrightarrow{IK}\left(\frac{1}{2};\frac{3}{10};0\right)$,

Une équation paramétrique de la droite (KI) est :

$$(KI)=\left\{M\,/\,\overrightarrow{IM}=k\times\overrightarrow{IK}\ ,k\in\mathbb{R}\right\}=\begin{cases}x=\dfrac{k}{2}\\ y=\dfrac{1}{5}+\dfrac{3k}{10}\ ,k\in\mathbb{R}\\ z=0\end{cases}$$

Un vecteur directeur de la droite (LJ) est :

$$\overrightarrow{\mathrm{JL}}\left(\frac{1}{2};0;\frac{3}{10}\right)$$

Une équation paramétrique de la droite (LJ) est :

$$(\mathrm{LJ})=\left\{M\,/\,\overrightarrow{\mathrm{LM}}=t\times\overrightarrow{\mathrm{LJ}}\ ,t\in\mathbb{R}\right\}=\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{t}{2}\\ y=0 & ,t\in\mathbb{R}\\ z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3t}{10}\end{cases}$$

On cherche un éventuel point d'intersection H appartenant à ces deux droites, ses coordonnées vérifient :

$$\begin{cases}\dfrac{k}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{t}{2}\\ \dfrac{1}{5}+\dfrac{3k}{10}=0\\ 0=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3t}{10}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=1+t\\ \dfrac{3k}{10}=-\dfrac{1}{5}\\ \dfrac{3t}{10}=-\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=1+t\\ k=-\dfrac{2}{3}\\ t=-\dfrac{5}{3}\end{cases}\quad \text{or : } 1+t=1-\frac{5}{3}=-\frac{2}{3}=k$$

Le système est compatible donc les droites (KI) et (LJ) sont sécantes en un point H de coordonnées :

Pour $k=-\dfrac{2}{3}$: $\begin{cases}x_{\mathrm{H}}=\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{1}{3}\\ y_{\mathrm{H}}=\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{10}\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{5}=0\\ z_{\mathrm{H}}=0\end{cases}$, pour $t=-\dfrac{5}{3}$: $\begin{cases}x_{\mathrm{H}}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{5}{3}\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{6}=-\dfrac{1}{3}\\ y_{\mathrm{H}}=0\\ z_{\mathrm{H}}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{10}\times\left(-\dfrac{5}{3}\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=0\end{cases}$

Soit : $\mathrm{H}\left(-\dfrac{1}{3};0;0\right)$

Un vecteur directeur de la droite (AB) est :

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}(1;0;0)$$

Or $\quad\overrightarrow{\mathrm{AH}}\left(-\dfrac{1}{3};0;0\right)$

Donc : $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

Le point H appartient à la droite (AB) et les trois droites sont concourantes.