Interrogation de géométrie dans l'espace

Exercice :

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\vec{\mathrm{i}};\vec{\mathrm{j}};\vec{\mathrm{k}}\right)$.

On considère deux droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques :

$$d_1 : \begin{cases} x = 2+t \\ y = 3-t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x = -5+2k \\ y = -1+k \\ z = 5 \end{cases}, k \in \mathbb{R}.$$

Le but de cet exercice est de déterminer, si elle existe, une troisième droite Δ qui soit sécante avec les deux droites d_1 et d_2.

1. Vérifier que le point $\mathrm{A}(2;3;0)$ appartient à la droite d_1.
2. Donner un vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$ de la droite d_1 et un vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}$ de la droite d_2.
   Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ?
3. Montrer que les vecteurs $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas coplanaires.
4. Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par le point A et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\vec{v}$. On étudie dans cette question l'intersection de la droite d_2 et du plan $\mathcal{P}$.

   a) Justifier qu'une équation du plan $\mathcal{P}$ est $\begin{cases} x = 2+m+p \\ y = 3-m-2p \\ z = m-3p \end{cases}, m, p \in \mathbb{R}$.

   b) Montrer que la droite d_2 coupe le plan $\mathcal{P}$ au point $\mathrm{B}(3;3;5)$.
5. On considère maintenant la droite Δ dirigée par le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et passant par le point $\mathrm{B}(3;3;5)$.

   a) Donner une représentation paramétrique de cette droite Δ.

   b) Les droites d_1 et Δ sont-elles sécantes ? Justifier la réponse.
   Déterminer les coordonnées de l'éventuel point d'intersection.

   c) Expliquer pourquoi la droite Δ répond au problème posé.

Interrogation de géométrie dans l'espace – CORRIGE – M. Quet

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\vec{\mathrm{i}};\vec{\mathrm{j}};\vec{\mathrm{k}}\right)$.

On considère deux droites d_1 *et* d_2 *définies par les représentations paramétriques :*

$$d_1 : \begin{cases} x = 2+t \\ y = 3-t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad et \quad d_2 : \begin{cases} x = -5+2k \\ y = -1+k \\ z = 5 \end{cases}, k \in \mathbb{R}.$$

Le but de cet exercice est de déterminer, si elle existe, une troisième droite Δ *qui soit sécante avec les deux droites* d_1 *et* d_2.

1. *Vérifier que le point* $\mathrm{A}(2;3;0)$ *appartient à la droite* d_1.

Pour $t=0$ dans la représentation paramétrique de d_1, on obtient :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases} \text{ donc : } \mathrm{A}(2;3;0) \text{ appartient à la droite } d_1.$$

2. *Donner un vecteur directeur* $\overrightarrow{u_1}$ *de la droite* d_1 *et un vecteur directeur* $\overrightarrow{u_2}$ *de la droite* d_2.
Les droites d_1 *et* d_2 *sont-elles parallèles ?*

On sait que dans la représentation paramétrique d'une droite, les coefficients de x, y et z donnent les coordonnées d'un vecteur directeur de cette droite.

On en déduit que $\overrightarrow{u_1}\begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}$ est un vecteur directeur de d_1 et $\overrightarrow{u_2}\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ est un vecteur directeur de d_2.

On regarde si les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont colinéaires, c'est-à-dire s'il existe un réel k tel que :

$$\overrightarrow{u_2} = k \times \overrightarrow{u_1} \text{ soit : } \begin{cases} 2 = k \times 1 \\ 1 = k \times (-1) \\ 0 = k \times 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k \\ -1 = k \\ 0 = k \end{cases} \rightarrow \text{ce système est incompatible}$$

donc les coordonnées ne sont pas proportionnelles et les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

3. *Montrer que les vecteurs* $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u_1}$ *et* $\overrightarrow{u_2}$ *ne sont pas coplanaires.*

Supposons que ces trois vecteurs soient coplanaires. Il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{v} = a \times \overrightarrow{u_1} + b \times \overrightarrow{u_2}$.
On a donc :

$$\begin{cases} 1 = a + 2b \\ -2 = -a + b \\ -3 = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = 1 - a \\ b = -2 + a \\ a = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2}(1+3) = 2 \\ b = -2-3 = -5 \\ a = -3 \end{cases} \rightarrow \text{ce système est incompatible}$$

Donc les vecteurs $\vec{v}$, $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas coplanaires.

4. *Soit* $\mathcal{P}$ *le plan passant par le point A, et dirigé par les vecteurs* $\overrightarrow{u_1}$ *et* $\vec{v}$. *On étudie dans cette question l'intersection de la droite* d_2 *et du plan* $\mathcal{P}$.

c) *Justifier qu'une équation du plan $\mathcal{P}$ est* $\begin{cases} x = 2+m+p \\ y = 3-m-2p \text{ , } m, p \in \mathbb{R} \\ z = m-3p \end{cases}$.

Le plan $\mathcal{P}$ passe par le point A et est dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\vec{v}$. On peut définir sur le plan $\mathcal{P}$ un repère $\left(\text{A}; \overrightarrow{u_1}; \vec{v}\right)$. Ainsi, le plan $\mathcal{P}$ est constitué des points M tels que :

$$\left\{\text{M} / \overrightarrow{\text{AM}} = m \times \overrightarrow{u_1} + p \times \vec{v}, m, p \in \mathbb{R}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = m+p \\ y-3 = -m-2p \\ z = m-3p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+m+p \\ y = 3-m-2p \text{ , } m, p \in \mathbb{R} \\ z = m-3p \end{cases}$$

d) *Montrer que la droite d_2 coupe le plan $\mathcal{P}$ au point* $\text{B}(3;3;5)$.

Le point B appartient à la fois au plan $\mathcal{P}$ et à la droite d_2, donc :

$$\begin{cases} -5+2k = 2+m+p \\ -1+k = 3-m-2p \\ 5 = m-3p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5+2k = 2+(5+3p)+p \\ -1+k = 3-(5+3p)-2p \\ 5+3p = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5+2k = 2+5+3p+p \\ -1+k = 3-5-3p-2p \\ m = 5+3p \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5+2k = 7+4p \\ -1+k = -2-5p \\ m = 5+3p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5+2(-1-5p) = 7+4p \\ k = 1-2-5p = -1-5p \\ m = 5+3p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5-2-10p = 7+4p \\ k = -1-5p \\ m = 5+3p \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -10p-4p = 7+7 \\ k = -1-5p \\ m = 5+3p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -14p = 14 \\ k = -1-5p \\ m = 5+3p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = \dfrac{14}{-14} = -1 \\ k = -1-5\times(-1) = 4 \\ m = 5+3\times(-1) = 2 \end{cases}$$

Pour d_2, si $k = 4$: $\begin{cases} x = -5+2\times 4 = 3 \\ y = -1+4 = 3 \\ z = 5 \end{cases}$, soit le point $\text{B}(3;3;5)$.

Pour le plan $\mathcal{P}$, si $m = 2$ et $p = -1$: $\begin{cases} x = 2+2-1 = 3 \\ y = 3-2-2\times(-1) = 3 \\ z = 2-3\times(-1) = 5 \end{cases}$, on obtient aussi le point $\text{B}(3;3;5)$.

5. *On considère maintenant la droite Δ dirigée par le vecteur* $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, *et passant par le point* $\text{B}(3;3;5)$

a) *Donner une représentation paramétrique de cette droite Δ.*

$$\Delta = \left\{\text{M} / \overrightarrow{\text{BM}} = s \times \vec{v}, s \in \mathbb{R}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3+s \\ y = 3-2s \text{ , } s \in \mathbb{R} \\ z = 5-3s \end{cases}$$

b) *Les droites d_1 et Δ sont-elles sécantes ? Justifier la réponse. Déterminer les coordonnées de l'éventuel point d'intersection.*

On regarde si les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, c'est-à-dire s'il existe un réel k tel que :

$$\vec{v} = k \times \overrightarrow{u_1} \text{ soit : } \begin{cases} 1 = k \times 1 \\ -2 = k \times (-1) \\ -3 = k \times 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = k \\ 2 = k \\ -3 = k \end{cases} \rightarrow \text{ce système est incompatible}$$

Donc les *droites* d_1 *et* Δ ne sont pas parallèles.
Leur point d'intersection vérifie :

$$\begin{cases} 2+t = 3+s \\ 3-t = 3-2s \\ t = 5-3s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+(5-3s) = 3+s \\ 3-(5-3s) = 3-2s \\ t = 5-3s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7-3s = 3+s \\ -2+3s = 3-2s \\ t = 5-3s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3s-s = 3-7 \\ 3s+2s = 3+2 \\ t = 5-3s \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4s = -4 \\ 5s = 5 \\ t = 5-3s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 1 \\ s = 1 \\ t = 5-3\times 1 = 2 \end{cases}$$

Pour d_1, avec $t = 2$: $\begin{cases} x = 2+2 = 4 \\ y = 3-2 = 1 \\ z = 2 \end{cases}$ et pour Δ, avec $s = 1$: $\begin{cases} x = 3+1 = 4 \\ y = 3-2\times 1 = 1 \\ z = 5-3\times 1 = 2 \end{cases}$

On obtient le point d'intersection $\mathrm{C}(4;1;2)$.

c) *Expliquer pourquoi la droite Δ répond au problème posé.*
La droite Δ est bien sécante à d_1 d'après la question 5.b) et à d_2 car B appartient à d_2 et Δ.
Donc Δ est sécante aux deux droites d_1 et d_2, cela répond au problème posé.