Interrogation de géométrie dans l'espace n° 2

Exercice 1 :

Dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points $A(0;0;2)$, $B(1;1;4)$, $C(-2;6;2)$ et $D(3;-5;4)$.

1) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont-ils colinéaires ? Justifier.
2) Déterminer les équations paramétriques des droites (AB) et (CD).
3) Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ? Si oui, en quel point ?
   Que peut-on dire des droites (AB) et (CD) ?

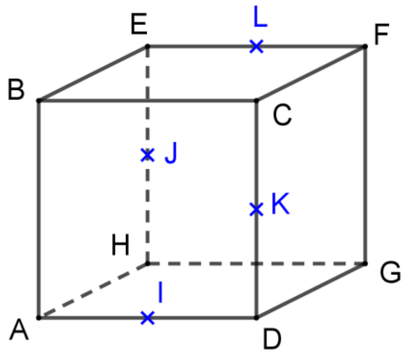
Exercice 2 :

On considère la droite (d) d'équation paramétrique $\begin{cases} x = 3+2k \\ y = 2k \\ z = -k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$ et le plan (P) d'équation paramétrique $\begin{cases} x = 3t \\ y = t+u+2 \\ z = -2u \end{cases}$, $t,u \in \mathbb{R}$.

Déterminer le point d'intersection de la droite (d) et du plan (P).

Exercice 3 :

On considère le cube ABCDEFGH et les points I milieu du côté $[AD]$, J milieu du côté $[EH]$, K milieu du côté $[CD]$ et L milieu du côté $[EF]$



1) Montrer par la méthode des vecteurs (avec la relation de Chasles) que les droites (IJ) et (KL) sont parallèles.
2) Dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AB}\right)$, déterminer les coordonnées des 12 points présents.
3) Déterminer les équations paramétriques des droites (IL) et (JK)
4) Les droites (IL) et (JK) sont-elles sécantes ? Si oui, en quel point ?

Interrogation de géométrie dans l'espace n° 2 – CORRIGE – M. Quet

Exercice 1 :

Dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, *on considère les points* $A(0;0;2)$, $B(1;1;4)$, $C(-2;6;2)$ *et* $D(3;-5;4)$.

1) *Les vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ *sont-ils colinéaires ? Justifier.*

$$\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix}1-0\\1-0\\4-2\end{vmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{vmatrix}1\\1\\2\end{vmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CD}\begin{vmatrix}3-(-2)\\-5-6\\4-2\end{vmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD}\begin{vmatrix}5\\-11\\2\end{vmatrix}$$

Existe-t-il un réel k tel que : $\overrightarrow{CD}=k\times\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases}5=k\\-11=k\\2=2k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=5\\k=-11\\k=1\end{cases}$.

Ce système est incompatible, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires.

2) *Déterminer les équations paramétriques des droites* (AB) *et* (CD).

$$(AB)=\left\{M(x;y;z)/\overrightarrow{AM}=k\times\overrightarrow{AB},k\in\mathbb{R}\right\}\text{, soit : }\begin{cases}x=k\\y=k\\z=2+2k\end{cases},\ k\in\mathbb{R}$$

$$(CD)=\left\{M(x;y;z)/\overrightarrow{CM}=t\times\overrightarrow{CD},t\in\mathbb{R}\right\}\text{, soit : }\begin{cases}x=-2+5t\\y=6-11t\\z=2+2t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$$

3) *Les droites* (AB) *et* (CD) *sont-elles sécantes ? Si oui, en quel point ?*

Que peut-on dire des droites (AB) *et* (CD) *?*

Peut-on trouver un point dont les coordonnées vérifient les deux équations paramétriques ?

$$\begin{cases}k=-2+5t\\k=6-11t\\2+2k=2+2t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=-2+5t\\-2+5t=6-11t\\2+2(-2+5t)=2+2t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=-2+5t\\5t+11t=6+2\\2-4+10t=2+2t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=-2+5t\\16t=8\\10t-2t=2+2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}k=-2+5t\\16t=8\\8t=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=-2+5\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\\t=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}\\t=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}\end{cases}$$

Ce système est compatible, les droites (AB) et (CD) sont <u>**sécantes**</u>.

Le coefficient $k=\frac{1}{2}$ donne pour la droite (AB) le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};3\right)$.

Le coefficient $t=\frac{1}{2}$ donne pour la droite (CD) le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};3\right)$.

Exercice 2 :

On considère la droite (d) d'équation paramétrique $\begin{cases} x=3+2k \\ y=2k \\ z=-k \end{cases}$ *, $k\in\mathbb{R}$ et le plan (P) d'équation paramétrique* $\begin{cases} x=3t \\ y=t+u+2 \\ z=-2u \end{cases}$ *, $t,u\in\mathbb{R}$. Déterminer le point d'intersection de la droite (d) et du plan (P).*

Peut-on trouver un point dont les coordonnées vérifient les équations paramétriques de la droite et du plan ?

$$\begin{cases} 3+2k=3t \\ 2k=t+u+2 \\ -k=-2u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3+2\times 2u=3t \\ 2\times 2u=t+u+2 \\ k=2u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u-3t=-3 \\ 4u-t-u=2 \\ k=2u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u-3t=-3 \\ 3u-t=2 \\ k=2u \end{cases} \begin{vmatrix} \times 1 \\ \times 3 \\ \\ \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4u-3t=-3 \\ 9u-3t=6 \\ k=2u \end{cases} \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \\ \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2-L_1 \\ \\ \end{vmatrix} \begin{cases} 4u-3t=-3 \\ 9u-4u-3t+3t=6-(-3) \\ k=2u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u-3t=-3 \\ 5u=9 \\ k=2u \end{cases}$$

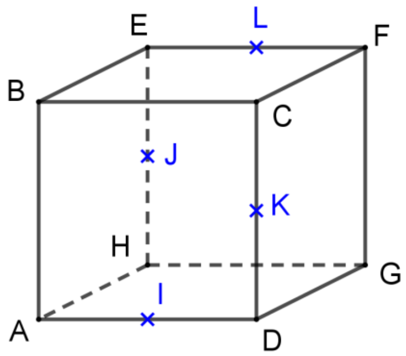
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3t=-3-4\times\frac{9}{5}=-\frac{15}{5}-\frac{36}{5}=-\frac{51}{5} \\ u=\frac{9}{5} \\ k=2\times\frac{9}{5}=\frac{18}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-\frac{51}{5}\times\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{17}{5} \\ u=\frac{9}{5} \\ k=2\times\frac{9}{5}=\frac{18}{5} \end{cases}$$

Le paramètre $k=\frac{18}{5}$ donne pour la droite (d) le point de coordonnées $\left(\frac{51}{5};\frac{36}{5};-\frac{18}{5}\right)$.

Les paramètres $t=\frac{17}{5}$ et $u=\frac{9}{5}$ donnent pour le plan (P) le point de coordonnées $\left(\frac{51}{5};\frac{36}{5};-\frac{18}{5}\right)$.

Exercice 3 :

On considère le cube ABCDEFGH et les points I milieu du côté $[AD]$, J milieu du côté $[EH]$, K milieu du côté $[CD]$ et L milieu du côté $[EF]$



1) *Montrer par la méthode des vecteurs (avec la relation de Chasles) que les droites (IJ) et (KL) sont parallèles.*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HJ} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AH}+\frac{1}{2}\overrightarrow{HE} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{AH}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC} \\ &= \overrightarrow{FL}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{KC} \\ &= \overrightarrow{KC}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FL} \\ &= \overrightarrow{KL} \end{aligned}$$

Ces vecteurs directeurs étant égaux et colinéaires, les droites (IJ) et (KL) sont parallèles.

2) *Dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AB}\right)$, déterminer les coordonnées des 12 points présents.*

Déterminer les équations paramétriques des droites (IL) et (JK).

$A(0;0;0)$, $B(0;0;1)$, $C(1;0;1)$, $D(1;0;0)$, $E(0;1;1)$, $F(1;1;1)$, $G(1;1;0)$, $H(0;1;0)$,
$I\left(\frac{1}{2};0;0\right)$, $J\left(0;1;\frac{1}{2}\right)$, $K\left(1;0;\frac{1}{2}\right)$ et $L\left(\frac{1}{2};1;1\right)$.

3) Les droites (IL) et (JK) sont-elles sécantes ? Si oui, en quel point ?

$$\overrightarrow{IL}\begin{vmatrix}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\\1-0\\1-0\end{vmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{IL}\begin{vmatrix}0\\1\\1\end{vmatrix} \text{ et } \overrightarrow{JK}\begin{vmatrix}1-0\\0-1\\\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\end{vmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{JK}\begin{vmatrix}1\\-1\\0\end{vmatrix}$$

$$(IL)=\left\{M(x;y;z)/\overrightarrow{IM}=k\times\overrightarrow{IL},k\in\mathbb{R}\right\}, \text{ soit : } \begin{cases}x=\frac{1}{2}\\y=k\\z=k\end{cases}, k\in\mathbb{R}$$

$$(JK)=\left\{M(x;y;z)/\overrightarrow{JM}=t\times\overrightarrow{JK},t\in\mathbb{R}\right\}, \text{ soit : } \begin{cases}x=t\\y=1-t\\z=\frac{1}{2}\end{cases}, t\in\mathbb{R}$$

Existe-t-il un point dont les coordonnées vérifient les équations paramétriques de la droite et du plan ?

$$\begin{cases}\frac{1}{2}=t\\k=1-t\\k=\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=\frac{1}{2}\\k=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\\k=\frac{1}{2}\end{cases}$$

Le système est compatible, les droites (IL) et (JK) sont sécantes.

Le paramètre $k=\frac{1}{2}$ donne pour la droite (IL) le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Le paramètre $t=\frac{1}{2}$ donne pour la droite (JK) le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.