Interrogation de géométrie

Exercice 1 :

On considère les points $A(1;3;-5)$, $B(4;-1;-3)$, $C(0;5;-2)$ et $D(-1;4;3)$.

1) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont-ils colinéaires ? Justifier.
2) Donner les équations paramétriques des droites (AB) et (CD).
3) Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ? Si oui, en quel point ?

   Que peut-on dire des droites (AB) et (CD) ?

Exercice 2 :

On considère les points $E(1;1;-3)$, $F(2;0;-7)$, $G(0;2;1)$ et $H(1;6;2)$.

1) Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont-ils colinéaires ? Justifier.
2) Donner les équations paramétriques des droites (EF) et (GH).
3) Les droites (EF) et (GH) sont-elles sécantes ? Si oui, en quel point ?

   Que peut-on dire des droites (EF) et (GH) ?

Interrogation de géométrie – CORRIGE – M. Quet

Exercice 1 :

On considère les points $A(1;3;-5)$, $B(4;-1;-3)$, $C(0;5;-2)$ *et* $D(-1;4;3)$.

1) *Les vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ *sont-ils colinéaires ? Justifier.*

On obtient : $\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix}4-1\\-1-3\\-3-(-5)\end{vmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{vmatrix}3\\-4\\2\end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{vmatrix}-1-0\\4-5\\3-(-2)\end{vmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD}\begin{vmatrix}-1\\-1\\5\end{vmatrix}$

L'existence d'un réel k tel que $k\times\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ s'écrit :

$$\begin{cases}k\times 3=-1\\k\times(-4)=-1\\k\times 2=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=-\frac{1}{3}\\k=\frac{1}{4}\\k=2,5\end{cases}$$ →ce système est incompatible

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires.

2) *Donner les équations paramétriques des droites* (AB) *et* (CD).

$(AB)=\left\{M(x;y;z)/\overrightarrow{AM}=k\times\overrightarrow{AB}\text{ , }k\in\mathbb{R}\right\}$ avec $\overrightarrow{AM}\begin{vmatrix}x-1\\y-3\\z-(-5)\end{vmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{vmatrix}x-1\\y-3\\z+5\end{vmatrix}$, d'où :

$$\begin{cases}x-1=k\times 3\\y-3=-4k\\z+5=k\times 2\end{cases}\text{ , }k\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1+3k\\y=3-4k\\z=-5+2k\end{cases}\text{ , }k\in\mathbb{R}$$

$(CD)=\left\{M(x;y;z)/\overrightarrow{CM}=t\times\overrightarrow{CD}\text{ , }t\in\mathbb{R}\right\}$ avec $\overrightarrow{CM}\begin{vmatrix}x-0\\y-5\\z-(-2)\end{vmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}\begin{vmatrix}x\\y-5\\z+2\end{vmatrix}$, d'où :

$$\begin{cases}x=t\times(-1)\\y-5=t\times(-1)\\z+2=t\times 5\end{cases}\text{ , }t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-t\\y=5-t\\z=-2+5t\end{cases}\text{ , }t\in\mathbb{R}$$

3) *Les droites* (AB) *et* (CD) *sont-elles sécantes ? Si oui, en quel point ?*

Que peut-on dire des droites (AB) *et* (CD) *?*

Si un point $I(x_I;y_I;z_I)$ appartient aux deux droites (AB) et (CD), ses coordonnées vérifient les deux équations paramétriques précédemment définies :

$$\begin{cases}1+3k=-t\\3-4k=5-t\\-5+2k=-2+5t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=-1-3k\\3-4k=5-(-1-3k)\\-5+2k=-2+5(-1-3k)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=-1-3k\\3-4k=5+1+3k\\-5+2k=-2-5-15k\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=-1-3k \\ -4k-3k=6-3 \\ 2k+15k=-7+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1-3k \\ -7k=3 \\ 17k=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1-3k \\ k=-\dfrac{3}{7} \\ k=-\dfrac{2}{17} \end{cases}$$

Le système est incompatible, les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes.

Les droites (AB) et (CD) n'étant pas non plus parallèles, elles sont non coplanaires.

Exercice 2 :

On considère les points $\mathrm{E}(1;1;-3)$, $\mathrm{F}(2;0;-7)$, $\mathrm{G}(0;2;1)$ *et* $\mathrm{H}(1;6;2)$.

1) *Les vecteurs* $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ *et* $\overrightarrow{\mathrm{GH}}$ *sont-ils colinéaires ? Justifier.*

On obtient : $\overrightarrow{\mathrm{EF}}\begin{vmatrix} 2-1 \\ 0-1 \\ -7-(-3) \end{vmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{EF}}\begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{GH}}\begin{vmatrix} 1-0 \\ 6-2 \\ 2-1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{GH}}\begin{vmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{vmatrix}$

L'existence d'un réel k tel que $k\times\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\overrightarrow{\mathrm{GH}}$ s'écrit :

$$\begin{cases} k\times 1=1 \\ k\times(-1)=4 \\ k\times(-4)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=1 \\ k=-4 \\ k=-\dfrac{1}{4} \end{cases}$$ → ce système est incompatible

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{GH}}$ ne sont pas colinéaires.

2) *Donner les équations paramétriques des droites* (EF) *et* (GH).

$(\mathrm{EF})=\left\{\mathrm{M}(x;y;z)/\overrightarrow{\mathrm{EM}}=k\times\overrightarrow{\mathrm{EF}},\ k\in\mathbb{R}\right\}$ avec $\overrightarrow{\mathrm{EM}}\begin{vmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-(-3) \end{vmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{EM}}\begin{vmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z+3 \end{vmatrix}$, d'où :

$$\begin{cases} x-1=k\times 1 \\ y-1=k\times(-1) \\ z+3=k\times(-4) \end{cases},\ k\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+k \\ y=1-k \\ z=-3-4k \end{cases},\ k\in\mathbb{R}$$

$(\mathrm{GH})=\left\{\mathrm{M}(x;y;z)/\overrightarrow{\mathrm{GM}}=t\times\overrightarrow{\mathrm{GH}},\ t\in\mathbb{R}\right\}$ avec $\overrightarrow{\mathrm{GM}}\begin{vmatrix} x-0 \\ y-2 \\ z-1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{GM}}\begin{vmatrix} x \\ y-2 \\ z-1 \end{vmatrix}$, d'où :

$$\begin{cases} x=t\times 1 \\ y-2=t\times 4 \\ z-1=t\times 1 \end{cases},\ t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ y=2+4t \\ z=1+t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}$$

3) *Les droites* (EF) *et* (GH) *sont-elles sécantes ? Si oui, en quel point ?*

Que peut-on dire des droites (EF) *et* (GH) *?*

Si un point $\mathrm{I}(x_{\mathrm{I}};y_{\mathrm{I}};z_{\mathrm{I}})$ appartient aux deux droites (EF) et (GH), ses coordonnées vérifient les deux équations paramétriques précédemment définies :

$$\begin{cases} 1+k=t \\ 1-k=2+4t \\ -3-4k=1+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1+k \\ 1-k=2+4(1+k) \\ -3-4k=1+(1+k) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1+k \\ 1-k=2+4+4k \\ -3-4k=1+1+k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1+k \\ -k-4k=6-1 \\ -4k-k=2+3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=1+k \\ -5k=5 \\ -5k=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1+k \\ k=-1 \\ k=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1-1=0 \\ k=-1 \\ k=-1 \end{cases}$$

Le système est compatible, les droites sont sécantes.

Pour $k=-1$, on obtient :

$$\begin{cases} x=1-1=0 \\ y=1-(-1)=2 \\ z=-3-4(-1)=1 \end{cases}$$

Pour $t=0$, on obtient :

$$\begin{cases} x=0 \\ y=2+4\times 0=2 \\ z=1+0=1 \end{cases}$$

Les droites (EF) et (GH) sont sécantes en $\mathrm{G}(0;2;1)$, elles sont donc coplanaires.