EXERCICE 3D.1 Soit f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$. On veut déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

a. Ecrire f sous la forme de la composée de deux fonctions $v\circ u$ où l'on précisera les fonctions u et v.

b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)$.

c. Recopier et compléter l'égalité : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{u\to.....}$ ……… = ……… .

EXERCICE 3D.2 Soit f définie sur $]-\infty;2]$ par $f(x)=\sqrt{2-x}$. On veut déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

a. Ecrire f sous la forme de la composée de deux fonctions $v\circ u$ où l'on précisera les fonctions u et v.

b. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x)$.

c. Recopier et compléter l'égalité : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{u\to.....}$ ……… = ……… .

EXERCICE 3D.3 Soit f définie sur $]-3;0[$ par $f(x)=\cos\dfrac{\pi}{x+3}$. On veut déterminer $\lim\limits_{x\to0} f(x)$.

a. Ecrire f sous la forme de la composée de deux fonctions $v\circ u$ où l'on précisera les fonctions u et v.

b. Calculer $\lim\limits_{x\to0} u(x)$.

c. Recopier et compléter l'égalité : $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{u\to.....}$ ……… = ……… .

AUTRE METHODE

EXERCICE 3D.4 Soit f définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x^2-1}$.

En posant $X=x^2-1$, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

EXERCICE 3D.5 Soit f définie sur $]-\infty;-1]$ par $f(x)=\sqrt{x^2-1}$.

En posant $X=x^2-1$, déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

EXERCICE 3D.6 Soit f définie sur $]-\infty;2]$ par $f(x)=\sqrt{-3x+6}$.

En posant $X=-3x+6$, déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

EXERCICE 3D.7 Soit f définie sur $[-1;+\infty[$ par $f(x)=x-\sqrt{x+1}$.

a. Expliquer pourquoi quand on essaie de déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ on arrive à une forme indéterminée.

b. Montrer que pour tout $x > 0$ on a $\sqrt{x+1} = x\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}$.

c. En déduire une forme factorisée de $f(x)$.

d. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

EXERCICE 3D.8 Soit f définie sur I = $]0;1]$ par $f(x)=\sqrt{-x^2+\dfrac{1}{x}}$.

Déterminer les limites de f aux bornes de I.

EXERCICE 3D.9 Soit f définie sur $[3;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-3x-2}}{x}$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

CORRIGE – NOTRE DAME DE LA MERCI – MONTPELLIER – M. QUET

EXERCICE 3D.1 Soit f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{1+\frac{1}{x}}$. On veut déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

a. f est la composée de deux fonctions u et v telles que $f=v\circ u$ définies sur $]0;+\infty[$ par :

$$u:x\mapsto 1+\frac{1}{x} \quad \text{et} \quad v:x\mapsto\sqrt{x}$$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x}=1$.

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} v(u(x)) = \lim\limits_{u\to1}\sqrt{u}=1$.

EXERCICE 3D.2 Soit f définie sur $]-\infty;2]$ par $f(x)=\sqrt{2-x}$. On veut déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

a. f est la composée de deux fonctions u et v telles que $f=v\circ u$ définies sur $]-\infty;2]$ par :

$$u:x\mapsto 2-x \quad \text{et} \quad v:x\mapsto\sqrt{x}$$

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2-x=+\infty$.

c. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{u\to+\infty}\sqrt{u}=+\infty$.

EXERCICE 3D.3 Soit f définie sur $]-3;0[$ par $f(x)=\cos\frac{\pi}{x+3}$. On veut déterminer $\lim\limits_{x\to0} f(x)$.

a. f est la composée de deux fonctions u et v telles que $f=v\circ u$ définies sur $]-3;0[$ par :

$$u:x\mapsto \frac{\pi}{x+3} \quad \text{et} \quad v:x\mapsto\cos x$$

b. $\lim\limits_{x\to0} u(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\pi}{x+3}=\frac{\pi}{3}$.

c. $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{u\to\frac{\pi}{3}}\cos u=\frac{1}{2}$.

EXERCICE 3D.4 Soit f définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x^2-1}$.

On pose $X=x^2-1$, ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} X=+\infty$. Ainsi :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}=\lim_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$$

EXERCICE 3D.5 Soit f définie sur $]-\infty;-1]$ par $f(x)=\sqrt{x^2-1}$.

On pose $X=x^2-1$, ainsi : $\lim\limits_{x\to-\infty} X=+\infty$. Ainsi :

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-1}=\lim_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$$

EXERCICE 3D.6 Soit f définie sur $]-\infty;2]$ par $f(x)=\sqrt{-3x+6}$.

On pose $X=-3x+6$, ainsi : $\lim\limits_{x\to-\infty} X=+\infty$. Ainsi :

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{-3x+6}=\lim_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$$

EXERCICE 3D.7 Soit f définie sur $[-1;+\infty[$ par $f(x)=x-\sqrt{x+1}$.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ est une forme indéterminée $\infty-\infty$

b. Pour tout $x>0$ on a : $\sqrt{x+1}=\sqrt{\dfrac{x^2}{x}+\dfrac{x^2}{x^2}}=\sqrt{x^2\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}=x\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}$.

c. Ainsi $f(x)=x-\sqrt{x+1}=x-x\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=x\left(1-\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right)$

d. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0^+$. On pose : $X=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{X\to0^+}\sqrt{X}=0^+$.

Par différence, on obtient : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=1$

Par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right)=+\infty$

EXERCICE 3D.8 Soit f définie sur I = $]0;1]$ par $f(x)=\sqrt{-x^2+\dfrac{1}{x}}$.

On pose $X=-x^2+\dfrac{1}{x}$, ainsi par quotient et par somme : $\lim\limits_{x\to0^+} X=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^-} X=0^+$

→en effet : $0<x<1 \Leftrightarrow 0<x^2<1$ et $0<x<1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x}>1$.

Ainsi : $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{-x^2+\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-}\sqrt{-x^2+\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{X\to0^+}\sqrt{X}=0$

EXERCICE 3D.9 Soit f définie sur $[3;+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-3x}-2}{x}=\frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{3}{x}\right)}-2}{x}=\frac{x\sqrt{1-\frac{3}{x}}-\frac{x\times2}{x}}{x}=\sqrt{1-\frac{3}{x}}-\frac{2}{x}.$$

On pose $X=1-\dfrac{3}{x}$, ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} X=1$. Ainsi :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\dfrac{3}{x}}=\lim\limits_{X\to1}\sqrt{X}=1$

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{2}{x}=0$ Donc par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$