On rappelle les 3 propriétés :

- **Si pour x assez grand,** $u(x) \leq f(x)$**, et si** $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$**, alors** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- **Si pour x assez grand,** $|f(x) - L| \leq u(x)$**, et si** $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0$**, alors** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$
- **Si pour x assez grand,** $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$**, et si** $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = L$**, alors** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$

EXERCICE 4A.1 Ecrire la conclusion de chaque proposition… si l'on peut conclure.

a. Puisque pour tout x on a $f(x) \geq x^2 + 3$ et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + 3 = +\infty$ alors :

b. Puisque pour tout x on a $|f(x) - 3| \leq \frac{1}{x}$ et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ alors :

c. Puisque pour tout x on a $\frac{1}{x+2} \leq f(x) \leq \frac{1}{x+1}$ et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0$ alors :

d. Puisque pour tout x on a $f(x) \geq x^2 + 1$ et puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 + 1 = +\infty$ alors :

e. Puisque pour tout x on a $f(x) \geq x^3 + 4$ et puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 + 4 = -\infty$ alors :

f. Puisque pour tout x on a $|f(x) + 3| \leq \frac{1}{1+x}$ et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x} = 0$ alors :

g. Puisque pour tout x on a $f(x) \leq x^3$ et puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ alors :

h. Puisque pour tout x on a $f(x) \leq x^2 + 2$ et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + 2 = +\infty$ alors :

i. Puisque pour tout x on a $\frac{2x+1}{x+3} \leq f(x) \leq \frac{2x+3}{x+1}$ et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x+3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+3}{x+1} = 2$ alors :

j. Puisque pour tout x on a $|f(x) - 2| \leq \frac{x+1}{x}$ et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = 1$ alors :

EXERCICE 4A.2 On considère la fonction f définie sur [0 ; +∞[par : $f(x) = x^2 + \cos x$

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ en utilisant une minoration de f.

EXERCICE 4A.3 On considère la fonction f définie sur]-∞ ; 0] par : $f(x) = x(2 + \sin x)$

Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ en utilisant une majoration de f.

EXERCICE 4A.4 On considère la fonction f définie sur]0 ; +∞[par : $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

a. Montrer que pour tout x de]0 ; +∞[on a : $-x \leq f(x) \leq x$

b. En déduire $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

EXERCICE 4A.5 On considère la fonction f définie sur]0 ; +∞[par : $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

On admet qu'au voisinage de 0, on a : $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$

En déduire $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

CORRIGE – NOTRE DAME DE LA MERCI – MONTPELLIER – M. QUET

EXERCICE 4A.1 Ecrire la conclusion de chaque proposition… si l'on peut conclure.

a. Puisque pour tout x on a $x^2+3\leq f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+3=+\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

b. Puisque pour tout x on a $|f(x)-3|\leq\dfrac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$

c. Puisque pour tout x on a $\dfrac{1}{x+2}\leq f(x)\leq\dfrac{1}{x+1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+1}=0$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

d. Puisque pour tout x on a $x^2+1\leq f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+1=+\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

e. Puisque pour tout x on a $x^3+4\leq f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3+4=-\infty$ alors : **on ne peut conclure**

f. Puisque pour tout x on a $|f(x)+3|\leq\dfrac{1}{1+x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+x}=0$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-3$

g. Puisque pour tout x on a $f(x)\leq x^3$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

h. Puisque pour tout x on a $f(x)\leq x^2+2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+2=+\infty$ alors : **on ne peut conclure**

i. Puisque pour tout x on a $\dfrac{2x+1}{x+3}\leq f(x)\leq\dfrac{2x+3}{x+1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+3}{x+1}=2$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$

j. Puisque pour tout x on a $|f(x)-2|\leq\dfrac{x+1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x}=1$ alors : **on ne peut conclure**

EXERCICE 4A.2 On considère la fonction f définie sur $[0\ ;+\infty[$ par : $f(x)=x^2+\cos x$

Pour tout $x\in[0;+\infty[$: $-1\leq\cos x \Leftrightarrow x^2-1\leq x^2+\cos x$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-1=+\infty$, donc par minoration de f /théorème de l'ascenseur, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

EXERCICE 4A.3 On considère la fonction f définie sur $]-\infty\ ;0]$ par : $f(x)=x(2+\sin x)$

Pour tout $x\in]-\infty;0]$: $\sin x\leq 1 \Leftrightarrow 2+\sin x\leq 3 \Leftrightarrow x(2+\sin x)\leq 3x$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x=-\infty$, donc par majoration de f / théorème de l'ascenseur, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

EXERCICE 4A.4 On considère la fonction f définie sur $]0\ ;+\infty[$ par : $f(x)=x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

a. Pour tout $x\in]0;+\infty[$: $-1\leq\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\leq 1 \Leftrightarrow -x\leq x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\leq x$

b. Or $\lim\limits_{x\to0} -x=\lim\limits_{x\to0} -x=0$ donc par encadrement / théorème des gendarmes : $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$.

EXERCICE 4A.5 On considère la fonction f définie sur $]0\ ;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$

On admet qu'au voisinage de 0, on a : $x-\dfrac{x^3}{6}\leq\sin x\leq x \Leftrightarrow 1-\dfrac{x^2}{6}\leq\dfrac{\sin x}{x}\leq 1$

Or $\lim\limits_{x\to0} 1-\dfrac{x^2}{6}=1^-$ donc par encadrement / théorème des gendarmes : $\lim\limits_{x\to0} f(x)=1$.

La Merci MONTPELLIER