Le théorème de L'Hôpital (et Bernoulli) sur les limites (Anthony Courgibet)

Etudier : $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}} \dfrac{x^2+x-20}{x^2-8x+16}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} \dfrac{x^2-8x+15}{x^2-5x+6}$

Approche classique :

$\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}} \dfrac{x^2+x-20}{x^2-8x+16} = FI$ →on ne factorise par x^2 qu'au voisinage de l'infini

x^2+x-20 : → $\Delta = 1^2-4\times 1\times(-20)=81=9^2$ donc $x_1=\dfrac{-1-9}{2}=-5$ et $x_2=\dfrac{-1+9}{2}=4$

Ainsi $x^2+x-20=(x+5)(x-4)$

$x^2-8x+16$: → $\Delta=(-8)^2-4\times 1\times 16=0$ donc $x_0=\dfrac{8}{2}=4$ Ainsi $x^2-8x+16=(x-4)^2$

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}} \dfrac{x^2+x-20}{x^2-8x+16} = \lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}} \dfrac{(x+5)(x-4)}{(x-4)^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}} \dfrac{x+5}{x-4}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}} x+5=9$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}} x-4=0^-$ donc par quotient : $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}} \dfrac{x^2+x-20}{x^2-8x+16} = \lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}} \dfrac{x+5}{x-4} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2-8x+15}{x^2-5x+6} = FI$ →on ne factorise par x^2 qu'au voisinage de l'infini

$x^2-8x+15$: → $\Delta=(-8)^2-4\times 1\times 15=4=2^2$ donc $x_1=\dfrac{8-2}{2}=3$ et $x_2=\dfrac{8+2}{2}=5$

Ainsi $x^2-8x+15=(x-3)(x-5)$

x^2-5x+6 : → $\Delta=(-5)^2-4\times 1\times 6=1=1^2$ donc $x_3=\dfrac{5-1}{2}=2$ et $x_4=\dfrac{5+1}{2}=3$

Ainsi $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

Donc $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2-8x+15}{x^2-5x+6} = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{(x-3)(x-5)}{(x-2)(x-3)} = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x-5}{x-2}$

$\lim\limits_{x\to 3^+} x-5=-2$ et $\lim\limits_{x\to 3^+} x-2=1$ donc par quotient : $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2-8x+15}{x^2-5x+6} = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x-5}{x-2} = \dfrac{-2}{1} = -2$

Approche d'Anthony :

$\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}} \dfrac{x^2+x-20}{x^2-8x+16} = FI$ →la dérivée de x^2+x-20 est $2x+1$

→la dérivée de $x^2-8x+16$ est $2x-8$ or $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}} 2x-8=0^-$

Ainsi : $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}} \dfrac{x^2+x-20}{x^2-8x+16} = \lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}} \dfrac{2x+1}{2x-8} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2-8x+15}{x^2-5x+6} = FI$ →la dérivée de $x^2-8x+15$ est $2x-8$

→la dérivée de x^2-5x+6 est $2x-5$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2-8x+15}{x^2-5x+6} = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{2x-8}{2x-5} = \dfrac{-2}{1} = -2$

Dans le premier exemple :

$$\lim_{x\to 10} \frac{x^2+x-20}{x^2-8x+16} = \frac{90}{36} = \frac{5}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 10} \frac{2x+1}{2x-8} = \frac{21}{12} = \frac{7}{4}$$

Pourquoi cette relation ne marche-t-elle que lors des formes indéterminées ?

Explications : le théorème de L'Hôpital (et Bernoulli) : j'ai arrangé la démonstration à ma sauce :

On pose : $f(x) = \dfrac{x^2-8x+15}{x^2-5x+6}$, on pose $u(x) = x^2-8x+15$ et $v(x) = x^2-5x+6$

On a : $u(3) = v(3) = 0$, c'est important pour la suite :

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{h\to 0^+} f(3+h) = \lim_{h\to 0^+} \frac{u(3+h)}{v(3+h)} = \lim_{h\to 0^+} \frac{u(3+h)-u(3)}{v(3+h)-v(3)} = \lim_{h\to 0^+} \frac{u(3+h)-u(3)}{h} \times \frac{h}{v(3+h)-v(3)}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} u'(3) \times \frac{1}{v'(3)} = \lim_{h\to 0^+} \frac{u'(3)}{v'(3)}$$