EXERCICE 6A.1

Soit la fonction définie sur $]-2;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x^2+x-7}{x+2}$

1. Déterminer *a*, *b* et *c* tels que : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+2}$

2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3. **a.** Calculer la fonction dérivée de f.
b. Etudier le signe de f'.
c. En déduire le sens de variation de f.

4. **a.** Montrer que C_f, la courbe représentative de f, admet la droite (Δ) d'équation $y = x – 1$ pour asymptote en $+\infty$.
b. Etudier la position de C_f par rapport à (Δ).
c. Montrer que C_f admet une autre asymptote (d) dont on précisera l'équation.

5. Dans un repère orthonormé (unité : 1 cm), tracer C_f, (Δ), et (d).

EXERCICE 6A.2

Soit la fonction définie sur $]-\infty;1[$ par : $f(x)=x^2-\dfrac{8}{x-1}$

1. **a.** Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
b. En déduire que C_f, la courbe représentative de f, admet une asymptote (d) dont on précisera l'équation.

2. **a.** Montrer que $f'(x)=\dfrac{2(x+1)(x^2-3x+4)}{(x-1)^2}$.
b. Etudier le signe de f'.
c. En déduire le sens de variation de f.
d. Dans un repère orthogonal (unités : 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée), tracer C_f et (d).

EXERCICE 6A.3

Soit *f* la fonction définie sur $]-3;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x^2+4x+6}{x+3}$. On note C_f sa courbe représentative.

1. **a.** Déterminer *a*, *b* et *c* tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+3}$.
b. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
c. Montrer que la droite (d) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à C_f, puis préciser la position de C_f par rapport à (d).
d. Déterminer $\lim\limits_{x\to-3} f(x)$ puis interpréter graphiquement ce résultat.

2. **a.** Montrer que $f'(x)=\dfrac{x^2+6x+6}{(x+3)^2}$
b. Etudier le signe de f' et en déduire le sens de variation de f.

3. **a.** Déterminer les coordonnées du point A, intersection de C_f avec l'axe des ordonnées.
b. Calculer le coefficient directeur de la tangente en A.
c. Dans un repère (O, I, J), représenter C_f ainsi que ses asymptotes et la tangente en A.

CORRIGE – NOTRE DAME DE LA MERCI – MONTPELLIER – M. QUET

EXERCICE 6A.1

Soit la fonction définie sur $]-2;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x^2+x-7}{x+2}$

1. Déterminer a, b et c tels que : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+2}$ → deux méthodes :

$$f(x)=\frac{x^2+x-7}{x+2}=\frac{x^2+2x-x-7}{x+2}=\frac{x^2+2x}{x+2}+\frac{-x-7}{x+2}=\frac{x(x+2)}{x+2}+\frac{-x-2-5}{x+2}=x+\frac{-x-2}{x+2}-\frac{5}{x+2}=x-1-\frac{5}{x+2}$$

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+2}=(ax+b)\times\frac{x+2}{x+2}+\frac{c}{x+2}=\frac{ax^2+2ax+bx+2b+c}{x+2}=\frac{ax^2+(2a+b)x+(2b+c)}{x+2}=\frac{x^2+x-7}{x+2}$$

→par identification : $\begin{cases}a=1\\2a+b=1\\2b+c=-7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=1-2a=1-2=-1\\c=-7-2b=-7+2=-5\end{cases}$ → $f(x)=\dfrac{x^2+x-7}{x+2}=x-1-\dfrac{5}{x+2}$

2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x-1=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x+2=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-5}{x+2}=0^-$ ainsi par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-2} x^2+x-7=(-2)^2+(-2)-7=4-2-7=-5$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} x+2=0^+$ donc par quotient : $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x)=-\infty$

3. a. Calculer la fonction dérivée de f.

$f(x)=x-1-\dfrac{5}{x+2}$ est dérivable en tant que somme et quotient de fonctions polynomiales.

Pour tout $x\in]-2;+\infty[$: $f'(x)=1-5\times\dfrac{-1}{(x+2)^2}=\dfrac{(x+2)^2}{(x+2)^2}+\dfrac{5}{(x+2)^2}=\dfrac{x^2+4x+4+5}{(x+2)^2}=\dfrac{x^2+4x+9}{(x+2)^2}$

b. Etudier le signe de f'.

Le dénominateur est strictement positif.

$\Delta=4^2-4\times1\times9=16-36=-20$:

→ $\Delta<0$ donc le numérateur ne s'annule pas et est du signe de a donc strictement positif.

Ainsi la dérivée est strictement positive. NB : $f'(x)=1-\dfrac{-1}{(x+2)^2}=1+\dfrac{1}{(x+2)^2}$ donc $f'(x)>0$

c. En déduire le sens de variation de f.

Pour tout $x\in]-2;+\infty[$: $f'(x)>0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $]-2;+\infty[$

4. a. Montrer que C_f, la courbe représentative de f, admet la droite (Δ) d'équation $y = x – 1$ pour asymptote en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)=+\infty=\lim\limits_{x\to+\infty} x-1-\dfrac{5}{x+2}-(x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{5}{x+2}=0^-$

donc C_f admet la droite (Δ) d'équation $y = x – 1$ pour asymptote en $+\infty$.

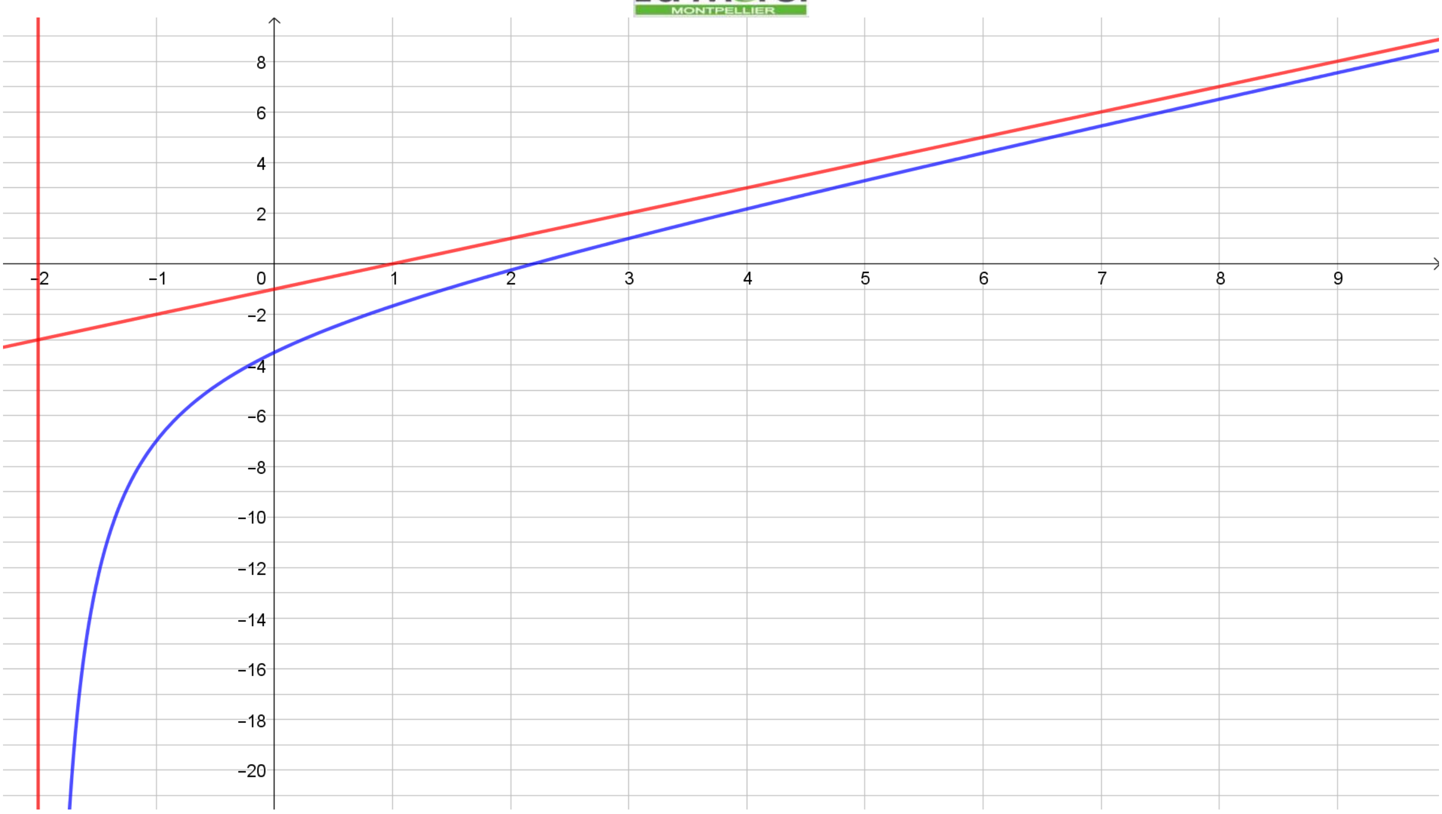
b. Etudier la position de C_f par rapport à (Δ).

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)=0^-$: au voisinage de $+\infty$: C_f est en-dessous de (Δ).

c. Montrer que C_f admet une autre asymptote (d) dont on précisera l'équation.

$\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x)=-\infty$ donc C_f admet une asymptote verticale (d) d'équation : $x=-2$.

5. Dans un repère orthonormé (unité : 1 cm), tracer C_f, (Δ), et (d).



EXERCICE 6A.2

Soit la fonction définie sur $]-\infty;1[$ par : $f(x)=x^2-\dfrac{8}{x-1}$

1. a. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x-1=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-8}{x-1}=0^+$ ainsi par somme : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to1} x^2=1^2=1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} x-1=0^-$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} \dfrac{-8}{x-1}=+\infty$, ainsi par somme : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=+\infty$

b. En déduire que C_f, la courbe représentative de f, admet une asymptote (d) dont on précisera l'équation.

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=+\infty$ donc C_f admet une asymptote verticale (d) d'équation : $x=1$.

2. a. Montrer que $f'(x)=\dfrac{2(x+1)(x^2-3x+4)}{(x-1)^2}=\dfrac{2(x^3-3x^2+4x+x^2-3x+4)}{(x-1)^2}=\dfrac{2(x^3-2x^2+x+4)}{(x-1)^2}$.

f est dérivable en tant que somme et quotient de fonctions polynomiales.

Pour tout $x\in]-\infty;1[$: $f'(x)=2x-\dfrac{8\times(-1)}{(x-1)^2}=2x\times\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)^2}-\dfrac{8\times(-1)}{(x-1)^2}=\dfrac{2x\times(x^2-2x+1)}{(x-1)^2}-\dfrac{-8}{(x-1)^2}$

$$=\frac{2x^3-4x^2+2x+8}{(x-1)^2}=\frac{2(x^3-2x^2+x+4)}{(x-1)^2}=\frac{2(x+1)(x^2-3x+4)}{(x-1)^2}$$

b. Etudier le signe de f'.

Pour tout $x\in]-\infty;1[$, le dénominateur est strictement positif.

Pour tout $x\in]-\infty;-1[$: $x+1<0$ et Pour tout $x\in]-1;1[$: $x+1>0$

$\Delta=(-3)^2-4\times1\times4=9-16=-7$:

→ $\Delta<0$ donc x^2-3x+4 ne s'annule pas et est du signe de a donc strictement positif.

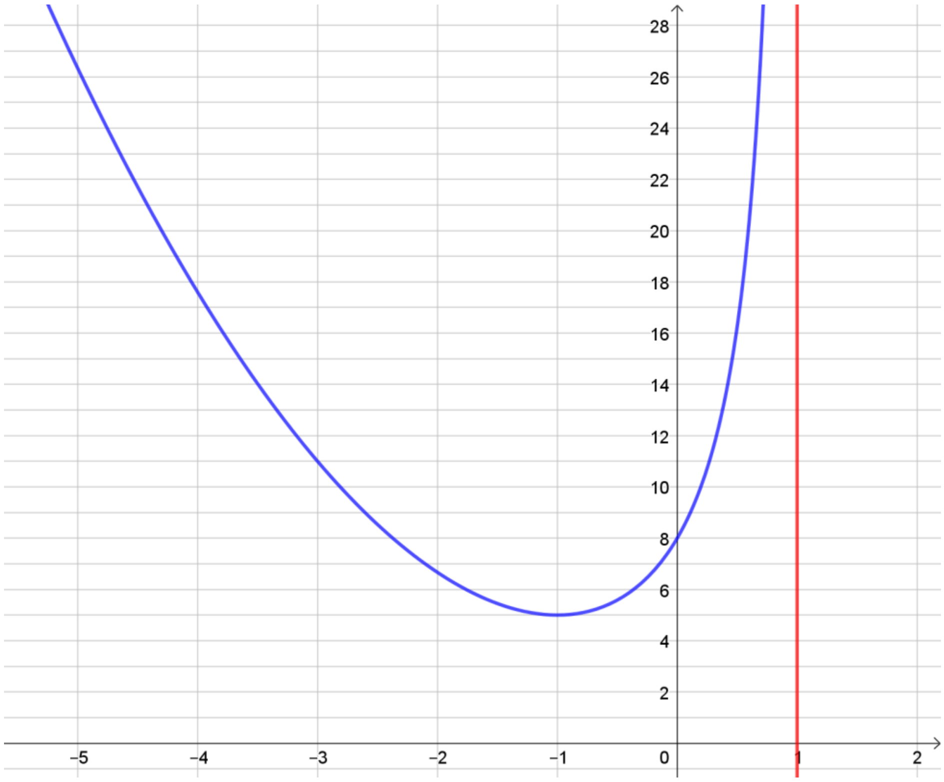
Pour tout $x\in]-\infty;-1[$: $f'(x)<0$ et Pour tout $x\in]-1;1[$: $f'(x)>0$

c. En déduire le sens de variation de f .

Pour tout $x\in]-\infty;-1[$: $f'(x)<0$ donc f est décroissante sur $]-\infty;-1[$.

Pour tout $x\in]-1;1[$: $f'(x)>0$ donc f est croissante sur $]-1;1[$.

. Dans un repère orthogonal (unités : 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée), tracer C_f et (d).



EXERCICE 6A.3

Soit f la fonction définie sur $]-3;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x^2+4x+6}{x+3}$. On note C_f sa courbe représentative.

1. a. *Déterminer a, b et c tels que* $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+3}$. → *deux méthodes :*

$$f(x)=\frac{x^2+4x+6}{x+3}=\frac{x^2+3x+x+6}{x+3}=\frac{x^2+3x}{x+3}+\frac{x+6}{x+3}=\frac{x(x+3)}{x+3}+\frac{x+3+3}{x+3}=x+\frac{x+3}{x+3}+\frac{3}{x+3}=x+1+\frac{3}{x+3}$$

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+3}=(ax+b)\times\frac{x+3}{x+3}+\frac{c}{x+3}=\frac{ax^2+3ax+bx+3b+c}{x+3}=\frac{ax^2+(3a+b)x+(3b+c)}{x+3}=\frac{x^2+4x+6}{x+3}$$

→par identification : $\begin{cases}a=1\\3a+b=4\\3b+c=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=4-3a=4-3=1\\c=6-3b=6-3\times1=3\end{cases}$ → $f(x)=\dfrac{x^2+4x+6}{x+3}=x+1+\dfrac{3}{x+3}$

b. *En déduire* $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x+1+\dfrac{3}{x+3}$ → $\lim\limits_{x\to+\infty}x+1=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}x+3=+\infty$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x+3}=0^+$

Par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

c. Montrer que la droite (d) d'équation y = x + 1 est asymptote à C_f , puis préciser la position de C_f par rapport à (d).

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty} x+1+\frac{3}{x+3}-(x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x+3}=0^+$: ainsi la droite (d) d'équation y = x + 1 est asymptote à C_f , $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x+1)=0^+$ indique que C_f est au-dessus de (d).

d. Déterminer $\lim\limits_{x\to-3} f(x)$ puis interpréter graphiquement ce résultat.

$\lim\limits_{x\to-3^+} x+3=0^+$ donc par quotient : $\lim\limits_{x\to-3^+}\frac{3}{x+3}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-3^+} x+1=-2$.

Par somme : $\lim\limits_{x\to-3} f(x)=+\infty$ et la courbe C_f admet une asymptote verticale d'équation $x=-3$.

2. *a. Montrer que $f'(x)=\frac{x^2+6x+6}{(x+3)^2}$*

$$f'(x)=\frac{(2x+4)(x+3)-\left(x^2+4x+6\right)\times 1}{(x+3)^2}=\frac{2x^2+6x+4x+12-x^2-4x-6}{(x+3)^2}=\frac{x^2+6x+6}{(x+3)^2}$$

b. Etudier le signe de f' et en déduire le sens de variation de f .

Le dénominateur est strictement positif en tant que fonction carrée.

$\Delta=6^2-4\times1\times6=36-24=12$: $\Delta>0$ donc deux solutions :

$$x_1=\frac{-6-\sqrt{12}}{2\times1}=\frac{-6-2\sqrt{3}}{2}=-3-\sqrt{3} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-6+\sqrt{12}}{2\times1}=\frac{-6+2\sqrt{3}}{2}=-3+\sqrt{3}$$

$a=1$ donc le polynôme est « orienté vers le haut » :

si $x\in\left]-\infty;-3-\sqrt{3}\right[\cup\left]-3+\sqrt{3};+\infty\right[$ alors $f'(x)>0$ et la fonction est croissante

si $x\in\left]-3-\sqrt{3};-3\right[\cup\left]-3;-3+\sqrt{3}\right[$ alors $f'(x)<0$ et la fonction est décroissante

3. *a. Déterminer les coordonnées du point A, intersection de C_f avec l'axe des ordonnées.*

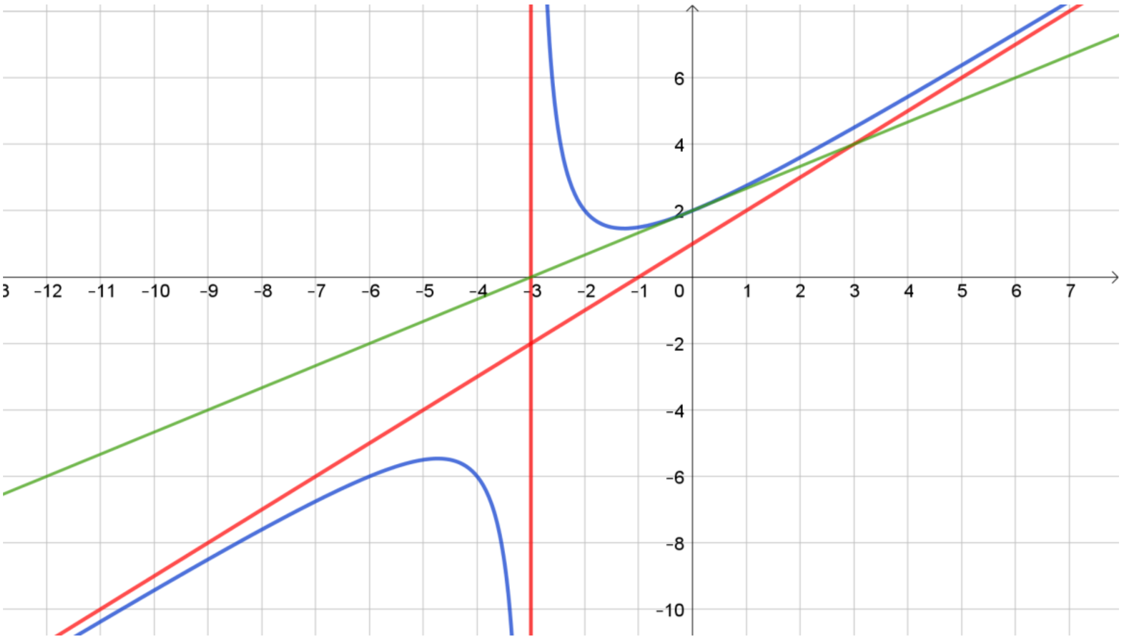
On cherche tout simplement l'image de 0 : $f(0)=\frac{0^2+4\times0+6}{0+3}=\frac{6}{3}=2$ donc $A(0;2)$.

b. Calculer le coefficient directeur de la tangente en A.

La dérivée en un point est égale à la pente de la tangente à la courbe en ce point :

$$f'(0)=\frac{0^2+6\times0+6}{(0+3)^2}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

c. Dans un repère (O, I, J), représenter C_f ainsi que ses asymptotes et la tangente en A.


-12
-11
-10
-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
6
4
2
-2
-4
-6
-8
-10