LIMITES TECHNIQUES AVEC LA FONCTION EXPONENTIELLE

RAPPELS : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

EXERCICE 7B.1 Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x+5}}{2x+3} =$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{1+x^2}}{4x^4-7} =$

c. $\lim\limits_{x\to-\infty} (4x-3)e^{5x-7} =$

d. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(2-5x^4\right)e^{3x^2} =$

e. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{8x} =$

f. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x^3}-1}{9x} =$

g. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{4x^2}-1}{x^5} =$

h. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x^2+5x}-1}{-2x} =$

i. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x+1}}{2x^3-3x^2+4x-5} =$

j. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(2-5x^2\right)e^{3x-1}$

k. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{5x}-1}{2x^2} =$

EXERCICE 7B.1 *Déterminer les limites suivantes :*

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x+5}}{2x+3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x+5}}{x+5} \times \dfrac{x+5}{2x+3}$

on pose : $X = x+5$ AINSI : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x+5}}{x+5} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^{X}}{X} = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+5}{2x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{5}{x}\right)}{x\left(2+\frac{3}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{5}{x}}{2+\frac{3}{x}} = \frac{1}{2}$$

Par produit : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x+5}}{2x+3} = +\infty}$

b. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{1+x^2}}{4x^4-7} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{1+x^2}}{1+x^2} \times \frac{1+x^2}{4x^4-7} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{1+x^2}}{1+x^2} \times \frac{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}{x^4\left(4-\frac{7}{x^4}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{1+x^2}}{1+x^2} \times \frac{\frac{1}{x^2}+1}{x^2\left(4-\frac{7}{x^4}\right)}$$

on pose : $X = 1+x^2$ AINSI : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{1+x^2}}{1+x^2} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^{X}}{X} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x^2}+1}{x^2\left(4-\frac{7}{x^4}\right)} = 0^+$ →Par produit : … c'est encore une forme indéterminée !!!

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{1+x^2}}{4x^4-7} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{1+x^2}}{\left(1+x^2\right)^2} \times \frac{\left(1+x^2\right)^2}{4x^4-7} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{1+x^2}}{\left(1+x^2\right)^2} \times \frac{1+2x^2+x^4}{4x^4-7}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{1+x^2}}{\left(1+x^2\right)^2} \times \frac{x^4\left(\frac{1}{x^4}+\frac{2}{x^2}+1\right)}{x^4\left(4-\frac{7}{x^4}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{1+x^2}}{\left(1+x^2\right)^2} \times \frac{\frac{1}{x^4}+\frac{2}{x^2}+1}{4-\frac{7}{x^4}}$$

on pose : $X = 1+x^2$ AINSI : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{1+x^2}}{\left(1+x^2\right)^2} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^{X}}{X^2} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^4} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7}{x^4} = 0$ donc par somme et quotient : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x^4}+\frac{2}{x^2}+1}{4-\frac{7}{x^4}} = \dfrac{1}{4}$

Par produit : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{1+x^2}}{4x^4-7} = +\infty}$

c. $$\lim_{x\to-\infty} (4x-3)e^{5x-7} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x-3}{5x-7} \times (5x-7)e^{5x-7} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(4-\frac{3}{x}\right)}{x\left(5-\frac{7}{x}\right)} \times (5x-7)e^{5x-7}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4-\frac{3}{x}}{5-\frac{7}{x}} \times (5x-7)e^{5x-7}$$

on pose : $X = 5x-7$ AINSI : $\lim_{x\to-\infty} (5x-7)e^{5x-7} = \lim_{X\to-\infty} Xe^{X} = 0^-$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4-\frac{3}{x}}{5-\frac{7}{x}} = \frac{4}{5}$$

Par produit : $\lim_{x\to-\infty} (4x-3)e^{5x-7} = 0$

d. $\lim_{x\to-\infty} \left(2-5x^4\right)e^{3x^3} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{2-5x^4}{3x^3}\right) \times \left(3x^3\right)e^{3x^3} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^4\left(\frac{2}{x^4}-5\right)}{3x^3}\right) \times \left(3x^3\right)e^{3x^3}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x\left(\frac{2}{x^3}-5\right)}{3}\right) \times \left(3x^3\right)e^{3x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2}{x^3}-5}{3} \times x \times \left(3x^3\right)e^{3x^3} \rightarrow \text{(F.I. !!!)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2}{x^3}-5}{3} \times \frac{3x^3}{3x^2} \times \left(3x^3\right)e^{3x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2}{x^3}-5}{3} \times \frac{1}{3x^2} \times \left(3x^3\right)^2 e^{3x^3}$$

on pose : $X = 3x^2$ AINSI : $\lim_{x\to-\infty} \left(3x^3\right)^2 e^{3x^3} = \lim_{X\to-\infty} X^2 e^{X} = 0^+$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2}{x^3}-5}{3} \times \frac{1}{3x^2} + \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2}{x^3}-5}{9x^2} = 0^+$$

Par produit : $\lim_{x\to-\infty} \left(2-5x^4\right)e^{3x^3} = 0$

e. $\lim_{x\to0} \frac{e^{2x}-1}{8x} = \lim_{x\to0} \frac{2x}{8x} \times \frac{e^{2x}-1}{2x} = \lim_{x\to0} \frac{1}{4} \times \frac{e^{2x}-1}{2x}$

on pose : $X = 2x$ AINSI : $\lim_{x\to0} \frac{e^{2x}-1}{2x} = \lim_{X\to0} \frac{e^{X}-1}{X} = 1$

Par produit : $\lim_{x\to0} \frac{e^{2x}-1}{8x} = \frac{1}{4}$

f. $\lim_{x\to0} \frac{e^{-x^3}-1}{9x} = \lim_{x\to0} \frac{-x^3}{9x} \times \frac{e^{-x^3}-1}{-x^3} = \lim_{x\to0} \frac{-x^2}{9} \times \frac{e^{-x^3}-1}{-x^3}$

on pose : $X = -x^3$ AINSI : $\lim_{x\to0} \frac{e^{-x^3}-1}{-x^3} = \lim_{X\to0} \frac{e^{X}-1}{X} = 1$

$$\lim_{x\to0} \frac{-x^2}{9} = 0^-$$

Par produit : $\lim_{x\to0} \frac{e^{-x^3}-1}{9x} = 0$

g. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x^2}-1}{x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{x^5}\times\frac{e^{4x^2}-1}{4x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{4}{x^3}\times\frac{e^{4x^2}-1}{4x^2}$$

on pose : $X=4x^2$ AINSI : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x^2}-1}{4x^2}=\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{e^X-1}{X}=1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{4}{x^3}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{4}{x^3}=-\infty$

Par produit : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{4x^2}-1}{x^5}=+\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{4x^2}-1}{x^5}=-\infty}$

h. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x^2+5x}-1}{-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x^2+5x}-1}{-2x}\times\frac{3x^2+5x}{3x^2+5x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x^2+5x}-1}{3x^2+5x}\times\frac{3x^2+5x}{-2x}$$

on pose : $X=3x^2+5x$ AINSI : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x^2+5x}-1}{3x^2+5x}=\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{e^X-1}{X}=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2+5x}{-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(3x+5)}{x\times(-2)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x+5}{-2}=-\frac{5}{2}$$

Par produit : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x^2+5x}-1}{3-2x}=-\dfrac{5}{2}}$

i. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x+1}}{2x^3-3x^2+4x-5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x+1}}{(x+1)^3}\times\frac{(x+1)^3}{2x^3-3x^2+4x-5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x+1}}{(x+1)^3}\times\frac{x^3+3x^2+3x+1}{2x^3-3x^2+4x-5}$$

on pose : $X=x+1$ AINSI : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x+1}}{(x+1)^3}=\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{e^X}{X^3}=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+3x^2+3x+1}{2x^3-3x^2+4x-5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(2-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{5}{x^3}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{2-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{5}{x^3}}$$

Or : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5}{x^3}=0$

Par somme et quotient : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{2-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{5}{x^3}}=\dfrac{1}{2}$

Par produit : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x+1}}{2x^3-3x^2+4x-5}=+\infty}$

j. $$\lim_{x\to-\infty}\left(2-5x^2\right)e^{3x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-5x^2}{(3x-1)^2}(3x-1)^2e^{3x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-5x^2}{9x^2-6x+1}(3x-1)^2e^{3x-1}$$

or : $$\lim_{x\to-\infty}\frac{2-5x^2}{9x^2-6x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(\frac{2}{x^2}-5\right)}{x^2\left(9-\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2}{x^2}-5}{9-\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ donc par somme et quotient ; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-5x^2}{9x^2-6x+1}=-\dfrac{5}{9}$

On pose : $X = 3x - 1$, donc par croissances comparées :

$$\lim_{x\to-\infty} (3x-1)^2 e^{3x-1} = \lim_{X\to-\infty} X^2 \times e^X = 0$$

Ainsi par produit : $\lim_{x\to-\infty} \left(2 - 5x^2\right) e^{3x-1} = 0$

k. $\lim_{x\to0} \dfrac{e^{5x}-1}{2x^2} = \lim_{x\to0} \dfrac{e^{5x}-1}{5x} \times \dfrac{5x}{2x^2} = \lim_{x\to0} \dfrac{e^{5x}-1}{5x} \times \dfrac{5x}{2x^2} = \lim_{x\to0} \dfrac{e^{5x}-1}{5x} \times \dfrac{5}{2x}$

On pose : $X = 5x$, donc : $\lim_{x\to0} \dfrac{e^{5x}-1}{5x} = \lim_{X\to0} \dfrac{e^X-1}{X^2} = 1$

$\lim_{x\to0^+} \dfrac{5}{2x} = +\infty$ donc par produit : $\lim_{x\to0^+} \dfrac{e^{5x}-1}{5x} \times \dfrac{5}{2x} = +\infty$

$\lim_{x\to0^-} \dfrac{5}{2x} = -\infty$ donc par produit : $\lim_{x\to0^-} \dfrac{e^{5x}-1}{5x} \times \dfrac{5}{2x} = -\infty$