EXERCICE 8B.1 - BAC 2007

On considère la fonction *f* définie pour tout réel *x* par :

$$f(x)=e^{2x}-e^{x}$$

On appelle f' la fonction dérivée de *f* et C_f la courbe représentative de *f* dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O, I, J) d'unité graphique 4 cm.

On remarquera que, pour tout réel *x*, on a :

$$e^{2x}-e^{x}=e^{x}\left(e^{x}-1\right)$$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe C_f ?

2. a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel *x* et étudier son signe.

b. Calculer $f(-\ln 2)$. On détaillera les calculs.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction *f*.

3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0.

4. Tracer la droite T et la courbe C_f.

EXERCICE 8B.2 - BAC 2008

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=e^{2x}-e^{x}-6$$

On note f' sa fonction dérivée sur $\mathbb{R}$.

1. a. Calculer $f'(x)$ et montrer que l'on a pour tout nombre réel *x* : $f'(x)=e^{x}\left(2e^{x}-1\right)$

b. Étudier les variations de la fonction *f* sur $\mathbb{R}$.

2. a. Calculer la limite de *f* en $-\infty$.

b. Calculer la limite de *f* en $+\infty$ (on pourra mettre en facteur le nombre e^x dans l'expression de $f(x)$.

3. a. Dresser le tableau de variations de la fonction *f* en précisant les limites de *f*.

b. Écrire le calcul qui montre que le minimum de la fonction *f* sur $\mathbb{R}$ est égal à $\frac{-25}{4}$

c. D'après le tableau de variation de la fonction *f*, quel est le nombre de solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E_1) suivante : (E_1) : $f(x)=0$.

EXERCICE 8B.3 - BAC 2007

Soit la fonction *f* définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par : $f(x)=e^{-x}+2x-3$

Soit C_f la courbe représentative de *f* dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) d'unités graphiques 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

1. Limites aux bornes

a. Déterminer la limite de la fonction *f* en $+\infty$.

b. Déterminer la limite de la fonction *f* en $-\infty$.

On pourra établir au préalable que pour tout nombre réel *x*, $f(x)=e^{-x}\left(1+2xe^{x}-3e^{x}\right)$

2. Asymptote oblique

a. Montrer que la droite (*d*) d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote à la courbe C_f.

b. Étudier la position relative de la droite (*d*) par rapport à la courbe C_f.

3. Étude des variations de la fonction *f*

a. Montrer que, pour tout nombre réel *x*,

$$f'(x)=\frac{2e^{x}-1}{e^{x}}$$

où f' est la dérivée de la fonction *f*.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f'(x)=0$

c. Etudier le signe de la dérivée f' de la fonction *f* sur $\mathbb{R}$.

d. Etablir le tableau de variations de la fonction *f*.

e. Calculer $f(1)$ et déterminer le signe de $f(x)$ pour tout nombre réel *x* appartenant à l'intervalle $[0;1]$.

4. Tracer la droite (*d*) et la courbe C_f dans le repère (O,I,J)

EXERCICE 8B.4 - BAC 2008

Partie A - On note *g* la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $g(x)=e^{-x}(-3x+1)+1$

1. Calculer la dérivée g' de la fonction *g*.

2. Étudier le sens de variation de la fonction *g* sur $\mathbb{R}$, et dresser le tableau de variation (On ne demande pas les limites de *g* en $+\infty$ et en $-\infty$).

3. Calculer $g\left(\frac{4}{3}\right)$ et en déduire le signe de la fonction *g* sur $\mathbb{R}$.

Partie B - On considère maintenant la fonction *f* définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x)=e^{-x}(3x+2)+x$$

On note C_f sa courbe représentative dans le repère orthogonal (O, I, J) d'unités graphiques : 3 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée).

1. Étude des limites.

a. Déterminer la limite de *f* en $+\infty$.

b. Déterminer la limite de *f* en $-\infty$.

2. Étude des variations de *f*.

a. Calculer la dérivée f' de la fonction *f*, et démontrer que, pour tout réel *x* : $f'(x)=g(x)$

b. En déduire le tableau de variations de la fonction *f*.

3. Démontrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe C_f en $+\infty$, et préciser la position de la courbe C_f par rapport à la droite D. (On notera A leur point d'intersection.)

4. Déterminer l'abscisse du point B de la courbe C_f où la tangente T est parallèle à la droite D.

5. Tracer, dans le repère (O, I, J), les droites D et T. Placer les points A et B puis tracer la courbe C_f .

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – M. Quet

EXERCICE 8B.1 - BAC 2007

On considère la fonction *f* définie pour tout réel *x* par :

$$f(x)=e^{2x}-e^{x}$$

On appelle f' la fonction dérivée de f et C_f la courbe représentative de *f* dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O, I, J) d'unité graphique 4 cm.

On remarquera que, pour tout réel *x*, on a :

$$e^{2x}-e^{x}=e^{x}\left(e^{x}-1\right)$$

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}-1=+\infty$

→par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0^{+}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}-1=-1$

→par produit : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

L'axe des abscisses d'équation : $y=0$ est asymptote à la courbe C_f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. a.

f est dérivable en tant que composée de fonctions exponentielles.

$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=2e^{2x}-e^{x}=e^{x}\left(2e^{x}-1\right)$

$\forall x\in\mathbb{R},\ e^{x}>0$

$\forall x\in\mathbb{R},\ 2e^{x}-1>0 \iff e^{x}>\frac{1}{2} \iff x>\ln\frac{1}{2}$

Si $x>-\ln 2$: $f'(x)>0$

b. $f(-\ln 2)=e^{-2\ln 2}-e^{-\ln 2}=e^{\ln 2^{-2}}-e^{\ln\frac{1}{2}}$

$f(-\ln 2)=e^{\ln\frac{1}{4}}-e^{\ln\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$

c. Tableau de variations de la fonction *f*.

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	$+\infty$

3. Equation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0 : $\mathrm{T}: y=f'(0)(x-0)+f(0)$

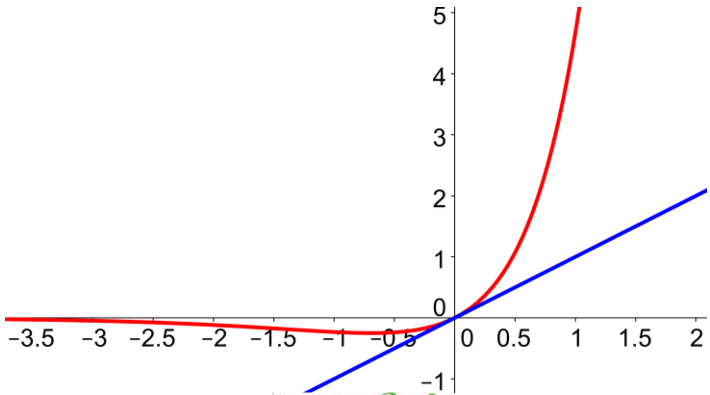
$f'(0)=2e^{2\times 0}-e^{0}=2-1=1$

$f(0)=e^{2\times 0}-e^{0}=1-1=0$

Donc : $\mathrm{T}: y=1(x-0)+0$

$\mathrm{T}: y=x$

4. Tracer la droite T et la courbe C_f.



EXERCICE 8B.2 - BAC 2008 – N.D. La Merci

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=e^{2x}-e^{x}-6$$

On note f' sa fonction dérivée sur $\mathbb{R}$.

1. a. f est dérivable en tant que composée de fonctions exponentielles.

$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=2e^{2x}-e^{x}=e^{x}\left(2e^{x}-1\right)$

b. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ e^{x}>0$

$\forall x\in\mathbb{R},\ 2e^{x}-1>0 \iff e^{x}>\frac{1}{2} \iff x>\ln\frac{1}{2}$

Si $x>-\ln 2$: $f'(x)>0$

2. a. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}=0^{+}$

→par somme : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-6$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}=+\infty$

→par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

3. a. Tableau de variations de la fonction *f* :

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-6	↘	$-\frac{25}{4}$	↗	$+\infty$

b. Minimum de la fonction *f* sur $\mathbb{R}$:

$f(-\ln 2)=e^{-2\ln 2}-e^{-\ln 2}-6=e^{\ln 2^{-2}}-e^{\ln\frac{1}{2}}-6$

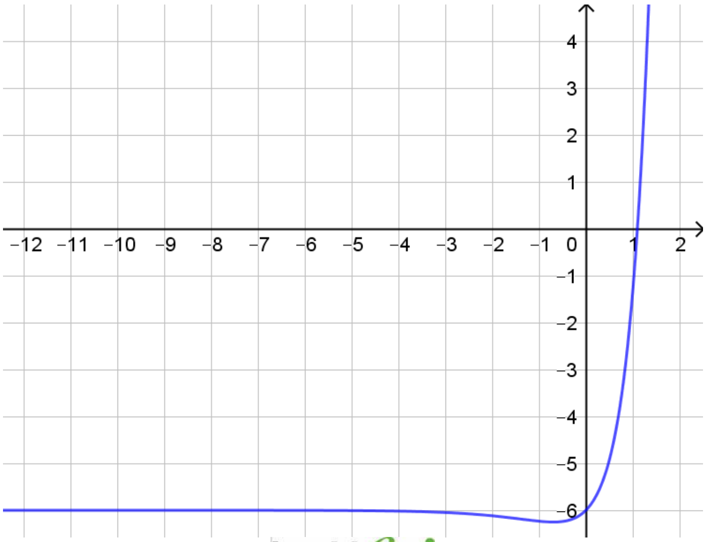
$f(-\ln 2)=e^{\ln\frac{1}{4}}-e^{\ln\frac{1}{2}}-6=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\frac{24}{4}=-\frac{25}{4}$

c. Solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E₁) : $f(x)=0$:

Si $x\in\left]-\infty;-\ln 2\right]$: $f(x)<0$

La fonction f est continue et strictement croissante sur $\left[-\ln 2;+\infty\right[$, $f(-\ln 2)=-\frac{25}{4}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, la fonction s'annule une unique fois sur $[-\ln 2;+\infty[$.



EXERCICE 8B.3 - BAC 2007 – N.D. La Merci

Soit la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par : $f(x)=e^{-x}+2x-3$

Soit C_f la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) d'unités graphiques 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

1. Limites aux bornes

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-3=+\infty$

Par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

b. $f(x)=e^{-x}+2x-3=e^{-x}\left(1+2xe^{x}-3e^{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^{x}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ par somme: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+2xe^{x}-3e^{x}\right)=1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$, par produit : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

2. Asymptote oblique

a. Soit la droite (d) d'équation $y = 2x - 3$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(2x-3)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0^{+}$

Donc la droite (d) est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

b. La différence étant positive car égale à e^{-x}, la courbe C_f est toujours au-dessus de la droite (d).

3. Étude des variations de la fonction *f*

a. f est dérivable en tant que composée de fonctions exponentielles.

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=-e^{-x}+2=-\frac{1}{e^{x}}+2=\frac{-1+2e^{x}}{e^{x}}$$

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow -1+2e^{x}=0 \Leftrightarrow e^{x}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{x}\right)=\ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=-\ln 2$$

c. Signe de la dérivée f' sur $\mathbb{R}$:

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow -1+2e^{x}>0 \Leftrightarrow e^{x}>\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x>-\ln 2$$

→Si $x\in]-\ln 2;+\infty[$: $f'(x)>0$

d. Tableau de variations de la fonction f.

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-2\ln 2-1$	↗	$+\infty$

$f(-\ln 2)=e^{\ln 2}+2\times(-\ln 2)-3=2-2\ln 2-3$

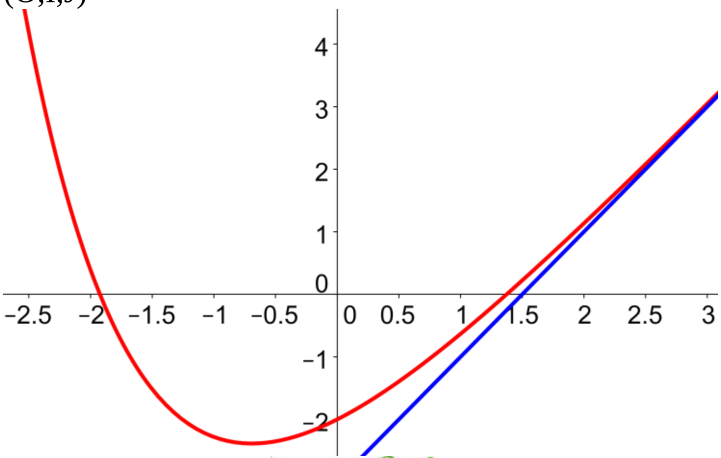
$f(-\ln 2)=-2\ln 2-1$

e. $f(1)=e^{-1}+2\times1-3=e^{-1}-1$

f est strictement croissante sur $[0;1]$ et $f(1)<0$

donc $\forall x\in[0;1]$: $f(x)<0$

4. Tracer la droite (d) et la courbe C_f dans le repère (O,I,J)



EXERCICE 8B.4 - BAC 2008 – N.D. La Merci

Partie A - On note g la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$g(x)=e^{-x}(-3x+1)+1$

1. g est dérivable en tant que composée de fonctions exponentielles et de fonctions polynomiales.

$\forall x\in\mathbb{R},\ g'(x)=-e^{-x}(-3x+1)+e^{-x}\times(-3)$

$$g'(x)=e^{-x}(3x-1)+e^{-x}\times(-3)=e^{-x}(3x-4)$$

2. Sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$:

$\forall x\in\mathbb{R},\ e^{-x}>0$ et $3x-4>0 \Leftrightarrow x>\frac{4}{3}$

Donc si $x>\frac{4}{3}$, alors $g'(x)>0$

Tableau de variation (On ne demande pas les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$) :

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	$g\left(\frac{4}{3}\right)$	↗	

3. $g\left(\frac{4}{3}\right)=e^{-\frac{4}{3}}\left(-3\times\frac{4}{3}+1\right)+1=e^{-\frac{4}{3}}(-4+1)+1$

$g\left(\frac{4}{3}\right)=-3e^{-\frac{4}{3}}+1\simeq 0,21$

$g\left(\frac{4}{3}\right)>0$ donc l'étude de la fonction g sur les intervalles $\left]-\infty;\frac{4}{3}\right]$ et $\left[\frac{4}{3};+\infty\right[$ permet d'affirmer que $\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)>0$.

Partie B - On considère maintenant la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x)=e^{-x}(3x+2)+x$$

On note C_f sa courbe représentative dans le repère orthogonal (O, I, J) d'unités graphiques : 3 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée).

1. Étude des limites.

a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

$$f(x)=\frac{3x+2}{e^x}+x=\frac{x}{e^x}\times\frac{3x+2}{x}+x=\frac{x}{e^x}\times\frac{3+\frac{2}{x}}{1}+x$$

Or $\forall n\in\mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{2}{x}}{1}=3$

Donc par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\times\frac{3+\frac{2}{x}}{1}=0$

Et par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

b. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

$$f(x)=\frac{x}{e^x}\times\frac{3+\frac{2}{x}}{1}+x$$

Par quotient : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3+\frac{2}{x}}{1}=3$

Donc par produit : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x}\times\frac{3+\frac{2}{x}}{1}=-\infty$

Et par somme : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

2. Étude des variations de *f*.

a. Calculer la dérivée f' de la fonction f, et démontrer que, pour tout réel x : $f'(x)=g(x)$

f est dérivable en tant que composée de fonctions exponentielles et de fonctions polynomiales.

$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=-e^{-x}\times(3x+2)+e^{-x}\times 3+1$

$=e^{-x}\times\left[-(3x+2)+3\right]+1$

$=e^{-x}(-3x+1)+1=g(x)$

b. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

$\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)>0$ donc $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)>0$:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

3. Démontrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe C_f en $+\infty$, et préciser la position de la courbe C_f par rapport à la droite D. (On notera A leur point d'intersection.)

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+2}{e^x}=0^+$

Donc la droite D est asymptote à la courbe C_f en $+\infty$.

$\frac{3x+2}{e^x}>0 \Leftrightarrow 3x+2>0 \Leftrightarrow x>-\frac{2}{3}$:

Si $x>-\frac{2}{3}$: C_f est au-dessus de D.

Si $x<-\frac{2}{3}$: C_f est au-dessous de D.

Leur point d'intersection est le point A d'abscisse $-\frac{2}{3}$

4. Déterminer l'abscisse du point B de la courbe C_f où la tangente T est parallèle à la droite D.

Deux droites parallèles ayant le même coefficient directeur, on doit résoudre l'équation : $f'(x)=1$

$\Leftrightarrow e^{-x}(-3x+1)+1=1$

$\Leftrightarrow e^{-x}(-3x+1)=0$

Or $\forall x\in\mathbb{R},\ e^{-x}>0$, donc :

$$(-3x+1)=0 \iff x=\frac{1}{3}$$

5. Tracer, dans le repère (O, I, J), les droites D et T. Placer les points A et B puis tracer la courbe C_f .