Limites de suites avec des exponentielles

Exercice 8C.1 On considère la suite (u_n) définie par $u_0=\frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\frac{e^{u_n}}{n+2}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $0<u_n\leq 1$.
2. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}\leq\frac{e}{n+2}$.
3. Montrer que la suite (u_n) converge.

Exercice 8C.2

Les suites (z_n) et (t_n) sont définies pour tout entier naturel n, par $z_0=1$, $z_{n+1}=z_n+1$ et $t_n=e^{-z_n}$.

On note $S_n=t_0+t_1+...+t_n$.

1. Montrer que la suite (t_n) est géométrique.
2. Montrer que la suite (t_n) est convergente.
3. Déterminer la limite de la suite (S_n).

Exercice 8C.3 Soit (u_n) la suite définie par $u_0=5$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=2-e^{-u_n}$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

1. $u_n\geq 0$.
2. $u_{n+1}\leq u_n$.

Exercice 8C.4

Partie A On considère la fonction *f* définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{x}e^{1-x}$.

On note C la courbe représentative de *f* dans un repère du plan.

1. Déterminer la limite de *f* en $+\infty$. On pourra vérifier que pour tout réel $x>0$, $f(x)=\frac{e}{\sqrt{x}}\times\frac{x}{e^x}$.

   Interpréter graphiquement le résultat.
2. La fonction *f* est dérivable sur $]0;+\infty[$. Pour $x>0$, calculer $f'(x)$.
3. Dresser le tableau de variation de *f*.

Partie B Pour tout entier naturel *n* non nul, on note u_n l'aire du domaine délimité par la courbe C, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x=n$ et $x=n+1$.

1. **a.** Esquisser une figure schématisant la situation.

   b. Démontrer que pour tout entier naturel *n* non nul, $f(n+1)\leq u_n\leq f(n)$.
2. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
3. Prouver la convergence de la suite (u_n) et déterminer sa limite.

Exercice 8C.5

1. On considère la fonction *f* définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{x}{e^x-1}$.

   a. Déterminer la limite de *f* en 0.

   b. Déterminer la limite de *f* en $+\infty$.
2. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel *n* non nul par : $u_n=\frac{1}{n}\left(1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+...+e^{\frac{n-1}{n}}\right)$.

   a. Calculer $1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+...+e^{\frac{n-1}{n}}$, puis en déduire que $u_n=(e-1)f\left(\frac{1}{n}\right)$.

   b. En déduire, en utilisant la question 1., que la suite (u_n) converge vers $e-1$.

Exercice 8C.1 *On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n,* $u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{n+2}$.

1. *Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $0 < u_n \leq 1$.*

Initialisation : $u_0 = \frac{1}{2}$ donc : $0 < u_0 \leq 1$ →l'initialisation est vérifiée.

Hérédité : Supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < u_n \leq 1$, cela implique-t-il $0 < u_{n+1} \leq 1$?

Par hypothèse : $0 < u_n \leq 1$

$$\Leftrightarrow e^0 < e^{u_n} \leq e^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+2} < \frac{e^{u_n}}{n+2} \leq \frac{e}{n+2}$$

Or si $n \in \mathbb{N}^*$, alors : $\frac{1}{n+2} > 0$ et $e < 3 \Leftrightarrow \frac{e}{n+2} \leq \frac{3}{n+2} \leq 1$

Donc : $0 < u_{n+1} \leq 1$ →l'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n \leq 1$.

2. *En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leq \frac{e}{n+2}$.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 < u_n \leq 1$

$$\Leftrightarrow e^0 < e^{u_n} \leq e^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+2} < \frac{e^{u_n}}{n+2} \leq \frac{e}{n+2}.$$

3. *Montrer que la suite (u_n) converge.*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e}{n+2} = 0$$

D'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = 0.$$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et la suite (u_n) est convergente vers la valeur 0.

Exercice 8C.2 :

Les suites (z_n) et (t_n) sont définies pour tout entier naturel n, par $z_0 = 1$, $z_{n+1} = z_n + 1$ et $t_n = e^{-z_n}$.

On note $S_n = t_0 + t_1 + ... + t_n$.

1. *Montrer que la suite (t_n) est géométrique.*

Pour tout entier naturel *n* :

$$t_{n+1} = e^{-z_{n+1}} = e^{-(z_n+1)} = e^{-z_n - 1} = e^{-z_n} \times e^{-1} = t_n \times e^{-1}$$

La suite (t_n) est géométrique de raison e^{-1}.

2. *Montrer que la suite (t_n) est convergente.*

$$t_0 = e^{-z_0} = e^{-1}.$$

L'expression générale de la suite (t_n) est :

$$t_n = t_0 \times q^n = e^{-1} \times \left(e^{-1}\right)^n = \left(e^{-1}\right)^{n+1}.$$

Or $0 < e^{-1} < 1$ donc : $\lim_{n\to+\infty} \left(e^{-1}\right)^{n+1} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} t_n = 0$.

La suite (t_n) est convergente vers 0.

3. *Déterminer la limite de la suite* (S_n).

$$S_n = t_0 + t_1 + \ldots + t_n$$
$$= \left(e^{-1}\right)^1 + \left(e^{-1}\right)^2 + \ldots + \left(e^{-1}\right)^{n+1}$$
$$= e^{-1} \times \frac{1-\left(e^{-1}\right)^{n+1}}{1-e^{-1}}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(e^{-1}\right)^{n+1} = 0$ donc :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = e^{-1} \times \frac{1}{1-e^{-1}} = \frac{\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}} = \frac{\frac{1}{e}}{\frac{e-1}{e}} = \frac{1}{e} \times \frac{e}{e-1} = \frac{1}{e-1}$$

Exercice 8C.3 :

Soit (u_n) *la suite définie par* $u_0 = 5$ *et, pour tout entier naturel n,* $u_{n+1} = 2 - e^{-u_n}$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

1. $u_n \geq 0$.

Initialisation : $u_0 = 5$ donc : $u_0 \geq 0$ →l'initialisation est vérifiée.

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq 0$, cela implique-t-il $u_{n+1} \geq 0$?

Par hypothèse : $u_n \geq 0$

$\Leftrightarrow -u_n \leq 0$

$\Leftrightarrow e^{-u_n} \leq 1$

$\Leftrightarrow -e^{-u_n} \geq -1$

$\Leftrightarrow -e^{-u_n} + 2 \geq -1 + 2$

$\Leftrightarrow u_{n+1} \geq 1 \geq 0$ → l'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

2. $u_{n+1} \leq u_n$.

Initialisation : $u_0 = 5$ et $u_1 = 2 - e^{-u_0} = 2 - e^{-5} \simeq 1{,}993$

donc : $u_1 \leq u_0$ →l'initialisation est vérifiée.

Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n+1} \leq u_n$,

cela implique-t-il $u_{n+2} \leq u_{n+1}$?

Par hypothèse : $u_{n+1} \leq u_n$

$\Leftrightarrow -u_{n+1} \geq -u_n$

$\Leftrightarrow e^{-u_{n+1}} \geq e^{-u_n}$

$\Leftrightarrow -e^{-u_{n+1}} \leq -e^{-u_n}$

$\Leftrightarrow 2 - e^{-u_{n+1}} \leq 2 - e^{-u_n}$

$\Leftrightarrow u_{n+2} \leq u_{n+1}$ → l'hérédité est vérifiée.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.

Exercice 8C.4 :

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{x}e^{1-x}$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère du plan.

1. *Déterminer la limite de f en $+\infty$. On pourra vérifier que pour tout réel $x>0$, $f(x)=\dfrac{e}{\sqrt{x}}\times\dfrac{x}{e^x}$.*

   Interpréter graphiquement le résultat.

   On pose : $\text{X}=1-x \iff \text{X}-1=-x \iff 1-\text{X}=x$. Si x tend vers $+\infty$, alors X tend vers $-\infty$.

   Ainsi :

   $$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}e^{1-x}=\lim_{\text{X}\to-\infty}\sqrt{1-\text{X}}e^{\text{X}}=\lim_{\text{X}\to-\infty}\sqrt{1-\text{X}}\times\frac{\text{X}}{\text{X}}\times e^{\text{X}}=\lim_{\text{X}\to-\infty}\frac{\sqrt{1-\text{X}}}{\text{X}}\times \text{X}e^{\text{X}}$$

   Par croissances comparées :

   $$\lim_{\text{X}\to-\infty}\text{X}e^{\text{X}}=0.$$

   Et : $$\lim_{\text{X}\to-\infty}\frac{\sqrt{1-\text{X}}}{\text{X}}=\lim_{\text{X}\to-\infty}\frac{\sqrt{\text{X}^2\left(\frac{1}{\text{X}^2}-\frac{\text{X}}{\text{X}^2}\right)}}{\text{X}}=\lim_{\text{X}\to-\infty}\frac{-\text{X}\sqrt{\frac{1}{\text{X}^2}-\frac{1}{\text{X}}}}{\text{X}}=\lim_{\text{X}\to-\infty}-\sqrt{\frac{1}{\text{X}^2}-\frac{1}{\text{X}}}=0.$$

   Ainsi par produit :

   $$\lim_{\text{X}\to-\infty}f(x)=0.$$

   Autre méthode plus rapide :

   $$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}e^{1-x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\times\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\times e\times e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e}{\sqrt{x}}\times xe^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e}{\sqrt{x}}\times\frac{x}{e^x}=0$$

   La courbe représentant la fonction f possède une asymptote horizontale d'équation $y=0$ au voisinage de $+\infty$.

2. *La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$. Pour $x>0$, calculer $f'(x)$.*

   $$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\times e^{1-x}+\sqrt{x}\times(-1)e^{1-x}=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)e^{1-x}=\left(\frac{1-2x}{2\sqrt{x}}\right)e^{1-x}$$

3. *Dresser le tableau de variation de f.*

   Sur $]0;+\infty[$, $e^{1-x}>0$ et $2\sqrt{x}>0$.

   $$1-2x>0 \iff -2x>-1 \iff x<\frac{1}{2}$$

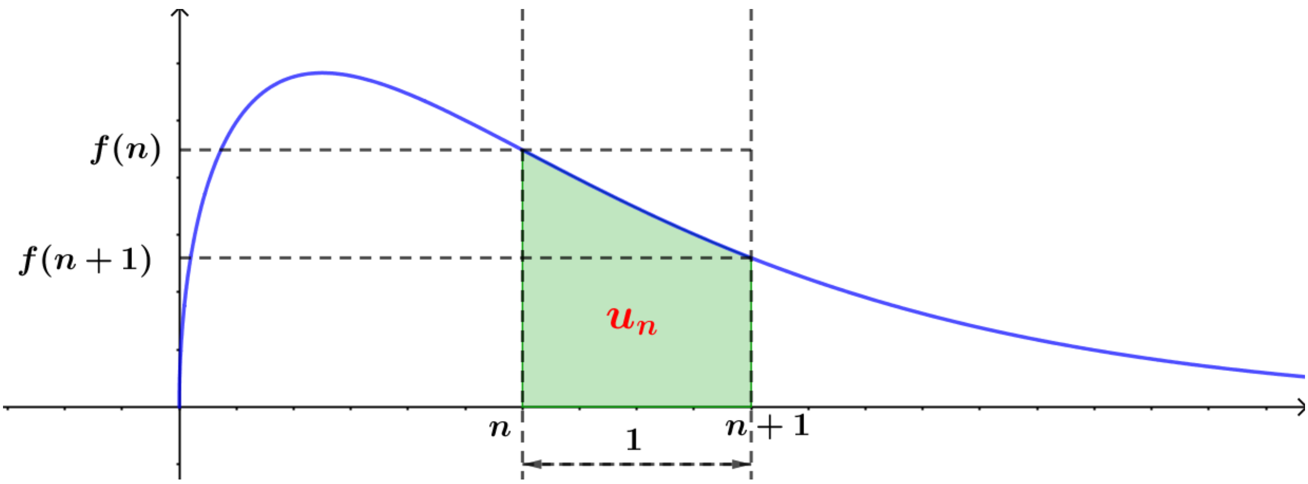
x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{2}\right)$	$\searrow$	0

   $$f(0)=0 \quad\text{et}\quad f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{1}{2}}e^{1-\frac{1}{2}}=\frac{e^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}$$

Partie B

Pour tout entier naturel n non nul, on note u_n l'aire du domaine délimité par la courbe C, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = n$ et $x = n+1$.

1. **a.** Esquisser une figure schématisant la situation.



b. *Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$.*

La fonction f étant décroissante sur $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$, l'aire u_n est donc comprise entre l'aire des rectangles de taille $1 \times f(n)$ et $1 \times f(n+1)$.

Ainsi :

$$f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$$

2. *En déduire que la suite (u_n) est décroissante.*

Pour tout entier naturel *n* :

$$f(n+2) \leq u_{n+1} \leq f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$$

soit pour tout entier naturel *n* :

$$u_{n+1} \leq u_n$$

Ainsi la suite (u_n) est décroissante.

3. *Prouver la convergence de la suite (u_n) et déterminer sa limite.*

La fonction f étant positive, la suite (u_n) est positive.

La suite (u_n) est ainsi décroissante et minorée, elle converge.

A partir de la relation :

$$f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$$

sachant que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(n+1) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(n) = 0$.

D'après le théorème des gendarmes, la suite (u_n) converge vers la valeur 0.

Exercice 8C.5 :

1. *On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$.*

a. *Déterminer la limite de f en 0.*

Formule de cours :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \text{ donc : } \lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}=1$$

b. *Déterminer la limite de f en $+\infty$.*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}=+\infty \text{ par croissances comparées.}$$

Donc : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

Autre méthode :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x-1}\times\frac{e^{-x}}{e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}$$

On pose : $\mathrm{X}=-x \Leftrightarrow x=-\mathrm{X}$.

Ainsi : $\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}=\lim_{\mathrm{X}\to-\infty}\frac{-\mathrm{X}e^{\mathrm{X}}}{1-e^{\mathrm{X}}}$.

Or $\lim_{\mathrm{X}\to-\infty} e^{\mathrm{X}}=0$ et par croissances comparées : $\lim_{\mathrm{X}\to-\infty}\mathrm{X}e^{\mathrm{X}}=0$.

Ainsi : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

2. *Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n=\frac{1}{n}\left(1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\ldots+e^{\frac{n-1}{n}}\right)$.*

a. *Calculer $1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\ldots+e^{\frac{n-1}{n}}$, puis en déduire que $u_n=(e-1)f\left(\frac{1}{n}\right)$.*

On reconnait la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme égal à 1 et de raison $e^{\frac{1}{n}}$. Ainsi :

$$1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\ldots+e^{\frac{n-1}{n}}=1\times\frac{1-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{1}{n}}}=\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}=\frac{e-1}{e^{\frac{1}{n}}-1}$$

Or $f(x)=\frac{x}{e^x-1}$ d'où : $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1}=\frac{1}{n}\times\frac{1}{e^{\frac{1}{n}}-1}$.

Donc $u_n=\frac{1}{n}\left(1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\ldots+e^{\frac{n-1}{n}}\right)=\frac{1}{n}\times(e-1)\times n\times f\left(\frac{1}{n}\right)=(e-1)\times f\left(\frac{1}{n}\right)$.

b. *En déduire, en utilisant la question 1., que la suite (u_n) converge vers $e-1$.*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0 \text{ et } \lim_{x\to 0} f(x)=1 \text{ , donc : } \lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)=1.$$

Ainsi : $\lim_{n\to+\infty} u(n)=e-1$.