Limites techniques avec des racines carrées

Exercice 1 : Avec des quotients

a) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}$

b) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{41-x^2}-4}{x+5}$

c) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{3x+21}-3}{2x+8}$

d) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{4x+16}-2}{3x+9}$

e) $\lim\limits_{\substack{x\to -5\\ x<-5}}\dfrac{\sqrt{6-2x}-4}{3x+15}$

f) $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ x<-3}}\dfrac{\sqrt{13-4x}-5}{2x+6}$

Exercice 2 : Avec des soustractions

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{9x^2+2x-7}-4x$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{3x^2+4x-6}-5x$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{9x^2-5x+2}-3x$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{10x^2-22x+1}+7x$

e) $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{4x^2-7x+9}+8x$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{25x^2-9x+2}-5x$

Exercice 1 : *Avec des quotients*

a) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}\times\dfrac{\sqrt{x+4}+3}{\sqrt{x+4}+3}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\left(\sqrt{x+4}\right)^2-3^2}{(x-5)\left(\sqrt{x+4}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x+4-9}{(x-5)\left(\sqrt{x+4}+3\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{(x-5)\left(\sqrt{x+4}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1}{\sqrt{x+4}+3}$

On pose $X=x+4$: $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{x+4}=\lim\limits_{X\to 9}\sqrt{X}=3$ donc par somme : $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{x+4}+3=6$

Par quotient : $\boxed{\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}=\dfrac{1}{6}}$

Autre méthode : on pose $g(x)=\sqrt{x+4}$, ainsi : $g(5)=\sqrt{5+4}=\sqrt{9}=3$, d'où :

$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{g(x)-g(5)}{x-5}=g'(5)$

$g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+4}}$ d'où : $\boxed{\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}=g'(5)=\dfrac{1}{2\sqrt{5+4}}=\dfrac{1}{6}}$

b) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{41-x^2}-4}{x+5}=\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{41-x^2}-4}{x+5}\times\dfrac{\sqrt{41-x^2}+4}{\sqrt{41-x^2}+4}=\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\left(\sqrt{41-x^2}\right)^2-4^2}{(x+5)\left(\sqrt{41-x^2}+4\right)}$

$=\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{41-x^2-16}{(x+5)\left(\sqrt{41-x^2}+4\right)}=\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{25-x^2}{(x+5)\left(\sqrt{41-x^2}+4\right)}=\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{(5+x)(5-x)}{(x+5)\left(\sqrt{41-x^2}+4\right)}$

$=\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{5-x}{\sqrt{41-x^2}+4}$

On pose $X=41-x^2$: $\lim\limits_{x\to -5}\sqrt{41-x^2}=\lim\limits_{X\to 16}\sqrt{X}=4$ donc par somme : $\lim\limits_{x\to -5}\sqrt{41-x^2}+4=8$

$\lim\limits_{x\to -5}5-x=10$ donc par quotient : $\boxed{\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{5-x}{\sqrt{41-x^2}+4}=\dfrac{10}{8}=\dfrac{5}{4}}$.

c) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{3x+21}-3}{2x+8}=\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{3x+21}-3}{2x+8}\times\dfrac{\sqrt{3x+21}+3}{\sqrt{3x+21}+3}=\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\left(\sqrt{3x+21}\right)^2-3^2}{(2x+8)\left(\sqrt{3x+21}+3\right)}$

$=\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{3x+21-9}{(2x+8)\left(\sqrt{3x+21}+3\right)}=\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{3x+12}{(2x+8)\left(\sqrt{3x+21}+3\right)}$

$=\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{3(x+4)}{2(x+4)\left(\sqrt{3x+21}+3\right)}=\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{3}{2\left(\sqrt{3x+21}+3\right)}$

On pose $\mathrm{X}=3x+21$: $\lim\limits_{x\to -4}\sqrt{3x+21}=\lim\limits_{\mathrm{X}\to 9}\sqrt{\mathrm{X}}=\sqrt{9}=3$

Par somme, produit et quotient : $\boxed{\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{3x+21}-3}{2x+8}=\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{3}{2\left(\sqrt{3x+21}+3\right)}=\dfrac{3}{12}=\dfrac{1}{4}}$

d) $$\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{4x+16}-2}{3x+9}=\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{4x+16}-2}{3x+9}\times\frac{\sqrt{4x+16}+2}{\sqrt{4x+16}+2}=\lim_{x\to-3}\frac{\left(\sqrt{4x+16}\right)^2-2^2}{(3x+9)\left(\sqrt{4x+16}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{4x+16-4}{(3x+9)\left(\sqrt{4x+16}+2\right)}=\lim_{x\to-3}\frac{4x+12}{(3x+9)\left(\sqrt{4x+16}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{4(x+3)}{3(x+3)\left(\sqrt{4x+16}+2\right)}=\lim_{x\to-3}\frac{4}{3\left(\sqrt{4x+16}+2\right)}$$

On pose $\mathrm{X}=4x+16$: $\lim_{x\to-3}\sqrt{4x+16}=\lim_{\mathrm{X}\to4}\sqrt{\mathrm{X}}=\sqrt{4}=2$

Par somme, produit et quotient : $\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{4x+16}-2}{3x+9}=\lim_{x\to-3}\frac{4}{3\left(\sqrt{4x+16}+2\right)}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

Autre méthode : on pose $g(x)=\sqrt{4x+16}$, ainsi : $g(-3)=\sqrt{4\times(-3)+16}=\sqrt{4}=2$, d'où :

$$\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{4x+16}-2}{3x+9}=\lim_{x\to-3}\frac{g(x)-g(-3)}{3(x+3)}=\lim_{x\to-3}\frac{1}{3}\times\frac{g(x)-g(-3)}{x-(-3)}=\frac{1}{3}\times g'(-3)$$

$g'(x)=\frac{4}{2\sqrt{4x+16}}=\frac{2}{\sqrt{4x+16}}$ d'où : $\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{4x+16}-2}{3x+9}=\frac{1}{3}\times\frac{2}{\sqrt{4\times(-3)+16}}=\frac{2}{3\sqrt{4}}=\frac{1}{3}$

e) $$\lim_{x\to-5}\frac{\sqrt{6-2x}-4}{3x+15}=\lim_{x\to-5}\frac{\sqrt{6-2x}-4}{3x+15}\times\frac{\sqrt{6-2x}+4}{\sqrt{6-2x}+4}=\lim_{x\to-5}\frac{\left(\sqrt{6-2x}\right)^2-4^2}{(3x+15)\left(\sqrt{6-2x}+4\right)}$$

$$=\lim_{x\to-5}\frac{6-2x-16}{(3x+15)\left(\sqrt{6-2x}+4\right)}=\lim_{x\to-5}\frac{-2x-10}{(3x+15)\left(\sqrt{6-2x}+4\right)}$$

$$=\lim_{x\to-5}\frac{-2(x+5)}{3(x+5)\left(\sqrt{6-2x}+4\right)}=\lim_{x\to-5}\frac{-2}{3\left(\sqrt{6-2x}+4\right)}$$

On pose $X=6-2x$ donc $\lim_{x\to-5}\sqrt{6-2x}=\lim_{X\to16}\sqrt{X}=4$

Par somme, produit et des limites : $\lim_{x\to-5}\frac{-2}{3\left(\sqrt{6-2x}+4\right)}=\frac{-2}{24}=-\frac{1}{12}$

Autre méthode : on pose $g(x)=\sqrt{6-2x}$, ainsi : $g(-5)=\sqrt{6-2\times(-5)}=\sqrt{16}=4$, d'où :

$$\lim_{x\to-5}\frac{\sqrt{6-2x}-4}{3x+15}=\lim_{x\to-5}\frac{g(x)-g(-5)}{3(x+5)}=\lim_{x\to-5}\frac{1}{3}\times\frac{g(x)-g(-5)}{x-(-5)}=\frac{1}{3}\times g'(-5)$$

$g'(x)=\frac{-2}{2\sqrt{6-2x}}=\frac{-1}{\sqrt{6-2x}}$ d'où : $\lim_{x\to-5}\frac{\sqrt{6-2x}-4}{3x+15}=\frac{1}{3}\times\frac{-1}{\sqrt{6-2\times(-5)}}=-\frac{1}{3\times4}=-\frac{1}{12}$

f) $$\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{13-4x}-5}{2x+6}=\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{13-4x}-5}{2x+6}\times\frac{\sqrt{13-4x}+5}{\sqrt{13-4x}+5}=\lim_{x\to-3}\frac{\left(\sqrt{13-4x}\right)^2-5^2}{(2x+6)\left(\sqrt{13-4x}+5\right)}$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{13-4x-25}{(2x+6)\left(\sqrt{13-4x}+5\right)}=\lim_{x\to-3}\frac{-4x-12}{(2x+6)\left(\sqrt{13-4x}+5\right)}$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{-4(x+3)}{2(x+3)\left(\sqrt{13-4x}+5\right)}=\lim_{x\to-3}\frac{-4}{2\left(\sqrt{13-4x}+5\right)}=\lim_{x\to-3}\frac{-2}{\sqrt{13-4x}+5}$$

On pose $X = 13-4x$ donc $\lim\limits_{x\to -3}\sqrt{13-4x} = \lim\limits_{X\to 25}\sqrt{X} = 5$

Par somme, produit et des limites : $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{-2}{\sqrt{13-4x}+5} = \dfrac{-2}{5+5} = -\dfrac{2}{10} = -\dfrac{1}{5}$

Autre méthode : on pose $g(x) = \sqrt{13-4x}$, ainsi : $g(-3) = \sqrt{13-4\times(-3)} = \sqrt{25} = 5$, d'où :

$$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{13-4x}-5}{2x+6} = \lim_{x\to -3}\frac{g(x)-g(-3)}{2(x+3)} = \lim_{x\to -3}\frac{1}{2}\times\frac{g(x)-g(-3)}{x-(-3)} = \frac{1}{2}\times g'(-3)$$

$$g'(x) = \frac{-4}{2\sqrt{13-4x}} = \frac{-2}{\sqrt{13-4x}}$$ d'où : $$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{13-4x}-5}{2x+6} = \frac{1}{2}\times\frac{-2}{\sqrt{13-4\times(-3)}} = \frac{-1}{\sqrt{25}} = -\frac{1}{5}$$

Exercice 2 : *Avec des soustractions*

a) $$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{9x^2+2x-7}-4x = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2\left(9+\frac{2x}{x^2}-\frac{7}{x^2}\right)}-4x = \lim_{x\to+\infty}|x|\sqrt{9+\frac{2}{x}-\frac{7}{x^2}}-4x$$

$$= \lim_{x\to+\infty}x\sqrt{9+\frac{2}{x}-\frac{7}{x^2}}-4x = \lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{9+\frac{2}{x}-\frac{7}{x^2}}-4\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{7}{x^2} = 0$$

On pose $\mathrm{X} = 9+\dfrac{2}{x}-\dfrac{7}{x^2}$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{9+\dfrac{2}{x}-\dfrac{7}{x^2}} = \lim\limits_{\mathrm{X}\to 9}\sqrt{\mathrm{X}} = \sqrt{9} = 3$

Par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{9+\dfrac{2}{x}-\dfrac{7}{x^2}}-4 = -1$ et par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\sqrt{9+\dfrac{2}{x}-\dfrac{7}{x^2}}-4\right] = -\infty$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{3x^2+4x-6}-5x = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2\left(3+\frac{4x}{x^2}-\frac{6}{x^2}\right)}-5x = \lim_{x\to+\infty}|x|\sqrt{3+\frac{4}{x}-\frac{6}{x^2}}-5x$$

$$= \lim_{x\to+\infty}x\sqrt{3+\frac{4}{x}-\frac{6}{x^2}}-5x = \lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{3+\frac{4}{x}-\frac{6}{x^2}}-5\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{6}{x^2} = 0$$

On pose $\mathrm{X} = 3+\dfrac{4}{x}-\dfrac{6}{x^2}$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{3+\dfrac{4}{x}-\dfrac{6}{x^2}} = \lim\limits_{\mathrm{X}\to 3}\sqrt{\mathrm{X}} = \sqrt{3}$

Par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{3+\dfrac{4}{x}-\dfrac{6}{x^2}}-5 = \sqrt{3}-2 < 0$ et par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\sqrt{3+\dfrac{4}{x}-\dfrac{6}{x^2}}-5\right] = -\infty$

c) $$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{9x^2-5x+2}-3x = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2\left(9-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}-3x = \lim_{x\to+\infty}|x|\sqrt{9-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}}-3x$$

$$= \lim_{x\to+\infty}x\sqrt{9-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}}-3x = \lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{9-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}}-3\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-5}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2} = 0$$

On pose $\mathrm{X} = 9+\dfrac{4}{x}-\dfrac{6}{x^2}$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{9-\dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{x^2}} = \lim\limits_{\mathrm{X}\to 9}\sqrt{\mathrm{X}} = \sqrt{9} = 3$

et par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{9-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}}-3=0$!!! On obtient une nouvelle forme indéterminée $\infty\times 0$.

C'était prévisible car $\sqrt{9x^2}=3x$

Autre méthode dans ce cas : avec le conjugué

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{9x^2-5x+2}-3x=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2-5x+2}-3x\right)\times\frac{\sqrt{9x^2-5x+2}+3x}{\sqrt{9x^2-5x+2}+3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2-5x+2-9x^2}{\sqrt{9x^2-5x+2}+3x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x+2}{\sqrt{9x^2-5x+2}+3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-5+\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(9-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}+3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-5+\frac{2}{x}\right)}{x\sqrt{9-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}}+3x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-5+\frac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{9-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}}+3\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5+\frac{2}{x}}{\sqrt{9-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}}+3}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2}=0$

Par somme et quotient des limites : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-5+\frac{2}{x}}{\sqrt{9-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}}+3}=\frac{-5}{\sqrt{9}+3}=-\frac{5}{6}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{10x^2-22x+1}+7x=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2\left(10-\frac{22}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+7x=\lim\limits_{x\to-\infty}|x|\sqrt{10-\frac{22}{x}+\frac{1}{x^2}}+7x$

$$=\lim_{x\to-\infty}-x\sqrt{10-\frac{22}{x}+\frac{1}{x^2}}+7x=\lim_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{10-\frac{22}{x}+\frac{1}{x^2}}+7\right)$$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{22}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$

Par somme et produit des limites : $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{10-\frac{22}{x}+\frac{1}{x^2}}+7\right)=-\infty$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2-7x+9}+8x=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2\left(4-\frac{7}{x}+\frac{9}{x^2}\right)}+8x=\lim\limits_{x\to-\infty}|x|\sqrt{4-\frac{7}{x}+\frac{9}{x^2}}+8x$

$$=\lim_{x\to-\infty}-x\sqrt{4-\frac{7}{x}+\frac{9}{x^2}}+8x=\lim_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{4-\frac{7}{x}+\frac{9}{x^2}}+8\right)$$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{7}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{9}{x^2}=0$

Par somme et produit des limites : $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{4-\frac{7}{x}+\frac{9}{x^2}}+8\right)=-\infty$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{25x^2-9x+2}-5x$ → on remarque que : $\sqrt{25x^2}=5x$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{25x^2-9x+2}-5x=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{25x^2-9x+2}-5x\right)\times\frac{\sqrt{25x^2-9x+2}+5x}{\sqrt{25x^2-9x+2}+5x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(-9+\frac{2}{x}\right)}{x\sqrt{25-\frac{9}{x}+\frac{2}{x^2}}+5x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(-9+\frac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{25-\frac{9}{x}+\frac{2}{x^2}}+5\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-9+\frac{2}{x}}{\sqrt{25-\frac{9}{x}+\frac{2}{x^2}}+5}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{9}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2} = 0$

Par somme et quotient des limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-9+\frac{2}{x}}{\sqrt{25-\frac{9}{x}+\frac{2}{x^2}}+5} = \frac{-9}{\sqrt{25}+5} = -\frac{9}{10}$