Term Spé **Notre Dame de La Merci** 2023

Contrôle de Mathématiques

Ne limite pas tes défis. Défie tes limites. Training go

Exercice 1 : (12 points)

Etudier les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2x^5 - 9x^3 - 8x}{3 - 2x - 7x^4 + 5x^6}$ b) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^2 - 4x - 32}{20 + 5x}$

c) $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{\sqrt{x+27} - 6}{4x - 36}$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{16x^2 - 7x - 1} - 4x$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(5 - 3x^2\right) e^{x^3+1}$ f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2+3x} - 1}{10x}$

Exercice 2 : (8 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par : $f(x) = x - 8 - \dfrac{4}{x-2}$.

1) Justifier que la dérivée de la fonction f est : $f'(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 8}{(x-2)^2}$ puis étudier son signe sur $\mathbb{R} - \{2\}$
2) Etudier les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.
3) Etablir le tableau de variation complet de la fonction f.
4) Justifier que la fonction admet une asymptote oblique d'équation $y = x - 8$.

CORRIGE du Contrôle de Mathématiques – M. Quet

Exercice 1 : ***(12 points)***

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^5-9x^3-8x}{3-2x-7x^4+5x^6} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^5\left(-2-\dfrac{9}{x^2}-\dfrac{8}{x^4}\right)}{x^6\left(\dfrac{3}{x^6}-\dfrac{2}{x^5}-\dfrac{7}{x^2}+5\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2-\dfrac{9}{x^2}-\dfrac{8}{x^4}}{x\left(\dfrac{3}{x^6}-\dfrac{2}{x^5}-\dfrac{7}{x^2}+5\right)}$

Or : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{9}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{8}{x^4} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{x^6} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x^5} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{7}{x^2} = 0$

Par somme et produit : $\lim\limits_{x\to-\infty} -2-\dfrac{9}{x^2}-\dfrac{8}{x^4} = -2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\dfrac{3}{x^6}-\dfrac{2}{x^5}-\dfrac{7}{x^2}+5\right) = -\infty$

Par quotient : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^5-9x^3-8x}{3-2x-7x^4+5x^6} = 0^+$

b) $\lim\limits_{x\to-4} \dfrac{x^2-4x-32}{20+5x}$ $\rightarrow \Delta = (-4)^2-4\times1\times(-32) = 16+128 = 144 = 12^2$, les racines sont 8 et -4.

Ainsi : $\lim\limits_{x\to-4} \dfrac{x^2-4x-32}{20+5x} = \lim\limits_{x\to-4} \dfrac{(x-8)(x+4)}{5(x+4)} = \lim\limits_{x\to-4} \dfrac{x-8}{5} = -\dfrac{12}{5}$

c) $\lim\limits_{x\to9} \dfrac{\sqrt{x+27}-6}{4x-36} = \lim\limits_{x\to9} \dfrac{\sqrt{x+27}-6}{4x-36} \times \dfrac{\sqrt{x+27}+6}{\sqrt{x+27}+6} = \lim\limits_{x\to9} \dfrac{\left(\sqrt{x+27}\right)^2-6^2}{4(x-9)\left(\sqrt{x+27}+6\right)}$

$= \lim\limits_{x\to9} \dfrac{x+27-36}{4(x-9)\left(\sqrt{x+27}+6\right)} = \lim\limits_{x\to9} \dfrac{x-9}{4(x-9)\left(\sqrt{x+27}+6\right)} = \lim\limits_{x\to9} \dfrac{1}{4\left(\sqrt{x+27}+6\right)}$

On pose : $\mathrm{X} = x+27$, donc : $\lim\limits_{x\to9} \sqrt{x+27} = \lim\limits_{\mathrm{X}\to36} \sqrt{\mathrm{X}} = 6$

Ainsi par quotient : $\lim\limits_{x\to9} \dfrac{1}{4\left(\sqrt{x+27}+6\right)} = \dfrac{1}{48}$

Autre méthode : on pose $g(x) = \sqrt{x+27}$, donc : $g(9) = \sqrt{9+27} = \sqrt{36} = 6$, ainsi :

$\lim\limits_{x\to9} \dfrac{\sqrt{x+27}-6}{4x-36} = \lim\limits_{x\to9} \dfrac{\sqrt{x+27}-6}{4(x-9)} = \dfrac{1}{4} \times \lim\limits_{x\to9} \dfrac{g(x)-g(9)}{x-9} = \dfrac{1}{4} \times g'(9)$

Or : $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+27}}$, donc : $g'(9) = \dfrac{1}{2\sqrt{9+27}} = \dfrac{1}{2\sqrt{36}} = \dfrac{1}{2\times6} = \dfrac{1}{12}$

Donc : $\lim\limits_{x\to9} \dfrac{\sqrt{x+27}-6}{4x-36} = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{48}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{16x^2-7x-1}-4x = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{16x^2-7x-1}-4x\right) \times \dfrac{\sqrt{16x^2-7x-1}+4x}{\sqrt{16x^2-7x-1}+4x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(\sqrt{16x^2-7x-1}\right)^2-(4x)^2}{\sqrt{16x^2-7x-1}+4x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{16x^2-7x-1-16x^2}{\sqrt{16x^2-7x-1}+4x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-7x-1}{\sqrt{16x^2-7x-1}+4x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-7-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(16-\frac{7}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}+4x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-7-\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{16-\frac{7}{x}-\frac{1}{x^2}}+4x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-7-\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{16-\frac{7}{x}-\frac{1}{x^2}}+4\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-7-\frac{1}{x}}{\sqrt{16-\frac{7}{x}-\frac{1}{x^2}}+4}$$

Or : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{7}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$

Donc par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty}-7-\frac{1}{x}=-7$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{16-\frac{7}{x}-\frac{1}{x^2}}+4=8$

Par quotient : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{16x^2-7x-1}-4x=-\frac{7}{8}$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(5-3x^2\right)e^{x^3+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(5-3x^2\right)\times\frac{x^3+1}{x^3+1}e^{x^3+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5-3x^2}{x^3+1}\times\left(x^3+1\right)e^{x^3+1}$

On pose : $\mathrm{X}=x^3+1$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+1\right)e^{x^3+1}=\lim\limits_{\mathrm{X}\to-\infty}\mathrm{X}e^{\mathrm{X}}=0$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5-3x^2}{x^3+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(\frac{5}{x^2}-3\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{5}{x^2}-3}{x\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}$$

Or : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}=0$ donc par somme et quotient : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{5}{x^2}-3}{x\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}=0^+$

Par produit : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(5-3x^2\right)e^{x^3+1}=0$

f) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2+3x}-1}{10x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2+3x}-1}{10x}\times\frac{x^2+3x}{x^2+3x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2+3x}-1}{x^2+3x}\times\frac{x^2+3x}{10x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2+3x}-1}{x^2+3x}\times\frac{x+3}{10}$

On pose : $\mathrm{X}=x^2+3x$, donc : $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2+3x}-1}{x^2+3x}=\lim\limits_{\mathrm{X}\to0}\frac{e^{\mathrm{X}}-1}{\mathrm{X}}=1$

D'autre part : $\lim\limits_{x\to0}\frac{x+3}{10}=\frac{3}{10}$

Donc par produit : $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2+3x}-1}{10x}=\frac{3}{10}$

Exercice 2 : *(8 points)*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{2\}$ par : $f(x)=x-8-\frac{4}{x-2}$.

1) *Justifier que la dérivée de la fonction f est : $f'(x)=\frac{x^2-4x+8}{(x-2)^2}$ puis étudier son signe sur $\mathbb{R}-\{2\}$.*

f est dérivable en tant que somme d'une fonction affine et du quotient d'une fonction affine définie sur son ensemble de définition.

$$f'(x)=1-4\times\frac{-1}{(x-2)^2}=\frac{(x-2)^2}{(x-2)^2}+\frac{4}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x+4}{(x-2)^2}+\frac{4}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x+8}{(x-2)^2}$$

Pour tout $x\in\mathbb{R}-\{2\}$: $(x-2)^2>0$

Au numérateur : $\Delta=(-4)^2-4\times1\times8=16-32=-16$

Or $a>0$: la parabole est orientée et pour tout $x\in\mathbb{R}-\{2\}$: $f'(x)>0$.

2) *Etudier les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.*

$\lim\limits_{x\to+\infty} x-8=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x-2}=0$ donc par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

De même : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} x-8=-6$; on pose $\mathrm{X}=x-2$, donc : $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}\frac{4}{x-2}=\lim\limits_{\substack{\mathrm{X}\to0\\\mathrm{X}<0}}\frac{4}{\mathrm{X}}=-\infty$

Par somme : $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} x-8-\frac{4}{x-2}=+\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} x-8=-6$; on pose $\mathrm{X}=x-2$, donc : $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{4}{x-2}=\lim\limits_{\substack{\mathrm{X}\to0\\\mathrm{X}>0}}\frac{4}{\mathrm{X}}=+\infty$

Par somme : $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} x-8-\frac{4}{x-2}=-\infty$

3) *Etablir le tableau de variation complet de la fonction f.*

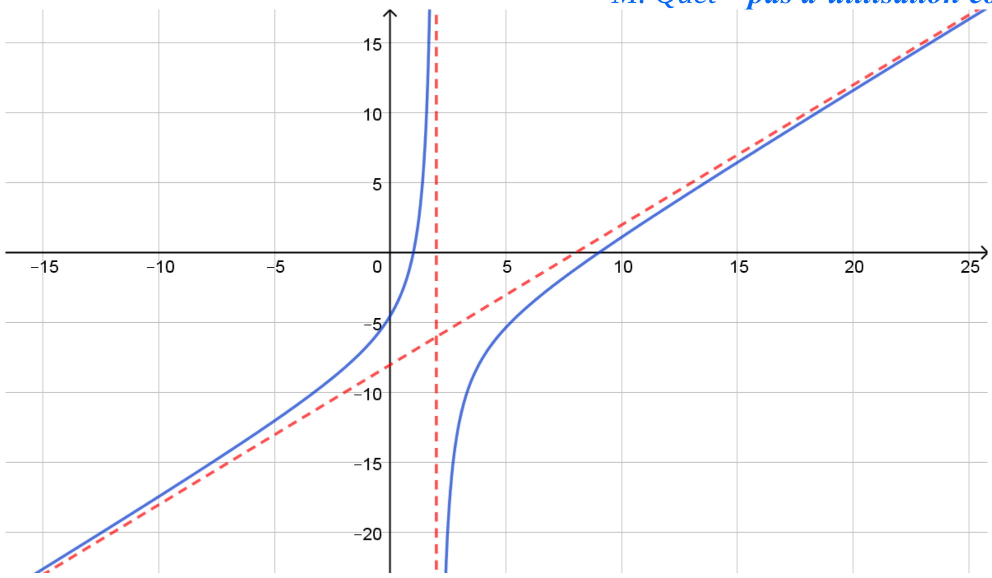
x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

4) *Justifier que la courbe représentant la fonction f admet une asymptote oblique d'équation $y=x-8$.*

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-8)=\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{4}{x-2}=0^-$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x-8)=\lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{4}{x-2}=0^+$

La courbe représentant la fonction f admet une asymptote oblique d'équation $y=x-8$.



15
10
5
0
−5
−10
−15
−20
−15
−10
−5
5
10
15
20
25