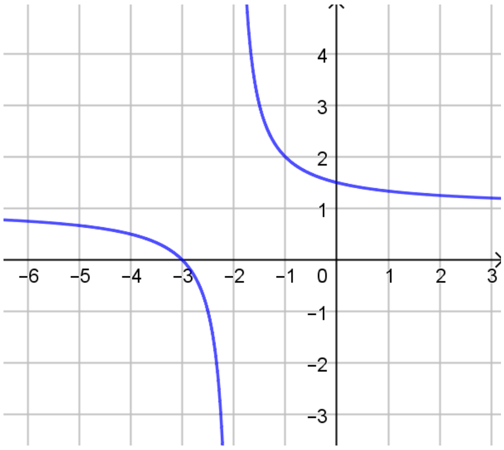
*M. Quet – **pas d'utilisation commerciale svp***

Term Spé **_Notre Dame de La Merci_** Vendredi 21 janvier 2022

Contrôle sur les limites de fonctions



Exercice 1 : ***(1 points)***

On donne ci-contre la représentation graphique d'une fonction f.

Construire le tableau de variation en prenant soin de noter toutes les limites.

Ecrire les quatre limites de la fonction : $\lim\limits_{\ldots\ldots\ldots} f(x) = \ldots\ldots$

Exercice 2 : ***(11 points)***

Etudier les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2-6x+7}{2-4x+5x^2-9x^3}$ b) $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{x^2+2x-3}{6+2x}$

c) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} \dfrac{\sqrt{x+7}-3}{2x-4}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2-8x+3}-2x$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(3+4x^2\right)e^{2x+3}$ f) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{2x^2}-1}{5x}$

Exercice 3 : ***(8 points)***

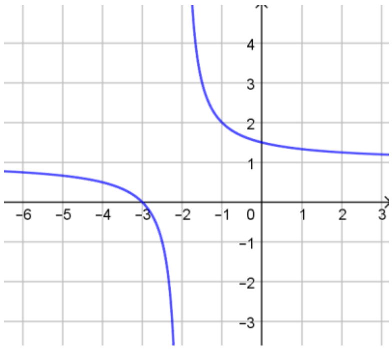
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par : $f(x)=x+4+\dfrac{5}{x-1}$.

1) Justifier que la dérivée de la fonction f est : $f'(x)=\dfrac{x^2-2x-4}{(x-1)^2}$ puis étudier son signe sur $\mathbb{R}-\{1\}$.
2) Etudier les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.
3) Etablir le tableau de variation complet de la fonction f.
4) Justifier que la fonction admet une asymptote oblique d'équation $y=x+4$.

CORRIGE du Contrôle sur les limites – M. Quet

Exercice 1 : ***(1 point)***

On donne ci-contre la représentation graphique d'une fonction f sur $\mathbb{R}$.
Construire le tableau de variation en prenant soin de noter toutes les limites.
Ecrire les quatre limites de la fonction : $\lim\limits_{\dots\dots} f(x) = \dots\dots$



x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=1\ ;\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=1\ ;\quad \lim_{x\to-2^-} f(x)=-\infty\ ;\quad \lim_{x\to-2^+} f(x)=+\infty$$

Exercice 2 : *Etudier les limites suivantes :* ***(11 points)***

a) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-6x+7}{2-4x+5x^2-9x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(3-\frac{6}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}{x^3\left(\frac{2}{x^3}-\frac{4}{x^2}+\frac{5}{x}-9\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3-\frac{6}{x}+\frac{7}{x^2}}{x\left(\frac{2}{x^3}-\frac{4}{x^2}+\frac{5}{x}-9\right)}$$

Or : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{6}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{7}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{x}=0$

Par somme et produit : $\lim\limits_{x\to-\infty} 3-\frac{6}{x}+\frac{7}{x^2}=3$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\frac{2}{x^3}-\frac{4}{x^2}+\frac{5}{x}-9\right)=+\infty$

Par quotient : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2-6x+7}{2-4x+5x^2-9x^3}=0^+$

b) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2+2x-3}{6+2x}$ $\rightarrow \Delta=2^2-4\times1\times(-3)=16=4^2$, les racines sont 1 et -3. Ainsi :

$$\lim_{x\to-3}\frac{x^2+2x-3}{6+2x}=\lim_{x\to-3}\frac{(x-1)(x+3)}{2(x+3)}=\lim_{x\to-3}\frac{x-1}{2}=-2$$

c) $$\lim_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{\sqrt{x+7}-3}{2x-4}\times\frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+7}+3}=\lim_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{\left(\sqrt{x+7}\right)^2-3^2}{(2x-4)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\lim_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{x+7-9}{(2x-4)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}$$

$$=\lim_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{x-2}{(2x-4)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\lim_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{x-2}{2(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\lim_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{1}{2\left(\sqrt{x+7}+3\right)}$$

On pose : $\mathrm{X}=x+7$, donc : $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\sqrt{x+7}=\lim\limits_{\substack{\mathrm{X}\to9\\\mathrm{X}>9}}\sqrt{\mathrm{X}}=3$

Ainsi par quotient : $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{1}{2\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\frac{1}{12}$

d) $$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2-8x+3}-2x=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2\left(2-\frac{8}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}-2x=\lim_{x\to+\infty}x\sqrt{2-\frac{8}{x}+\frac{3}{x^2}}-2x$$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{2-\frac{8}{x}+\frac{3}{x^2}}-2\right)$ avec : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{8}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{x^2}=0$

On pose : $X = 2 - \frac{8}{x} + \frac{3}{x^2}$, donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2 - \frac{8}{x} + \frac{3}{x^2}} = \lim\limits_{X \to 2} \sqrt{X} = \sqrt{2}$

Par somme et par produit : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\sqrt{2 - \frac{8}{x} + \frac{3}{x^2}} - 2\right) = -\infty$.

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(3+4x^2\right)e^{2x+3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3+4x^2}{(2x+3)^2}(2x+3)^2 \times e^{2x+3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3+4x^2}{4x^2+12x+9}(2x+3)^2 \times e^{2x+3}$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3+4x^2}{4x^2+12x+9} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2\left(\frac{3}{x^2}+4\right)}{x^2\left(4+\frac{12}{x}+\frac{9}{x^2}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{3}{x^2}+4}{4+\frac{12}{x}+\frac{9}{x^2}}$$

Or : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{12}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{9}{x^2} = 0$ donc par somme et quotient ; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3+4x^2}{4x^2+12x+9} = 1$

On pose : $X = 2x+3$, donc par croissances comparées :

$$\lim_{x \to -\infty} (2x+3)^2 \times e^{2x+3} = \lim_{X \to -\infty} X^2 \times e^X = 0$$

Ainsi par produit : $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(3+4x^2\right)e^{2x+3} = 0$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x^2}-1}{5x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x^2}-1}{2x^2} \times \frac{2x^2}{5x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x^2}-1}{2x^2} \times \frac{2x}{5}$

On pose : $X = 2x^2$, donc : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x^2}-1}{2x^2} = \lim\limits_{X \to 0} \frac{e^X-1}{X} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x}{5} = 0$ donc par produit : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x^2}-1}{2x^2} \times \frac{2x}{5} = 0$

Exercice 3 : *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = x + 4 + \frac{5}{x-1}$.* **(8 points)**

1) *Justifier que la dérivée de la fonction f est : $f'(x) = \frac{x^2-2x-4}{(x-1)^2}$ puis étudier son signe sur $\mathbb{R} - \{1\}$.*

$$f'(x) = 1 + 5 \times \frac{-1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2} - \frac{5}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x+1-5}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-4}{(x-1)^2}$$

$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$: $(x-1)^2 > 0$.

→ $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 4 + 16 = 20$, les racines sont $x_1 = \frac{2-\sqrt{20}}{2} = 1 - \sqrt{5}$ et $x_2 = \frac{2+\sqrt{20}}{2} = 1 + \sqrt{5}$

$a = 1$: le numérateur est positif sur l'intervalle $\left]-\infty ; 1-\sqrt{5}\right[\cup \left]1+\sqrt{5} ; +\infty\right[$

Ainsi : $f'(x) > 0$ si $x \in \left]-\infty ; 1-\sqrt{5}\right[\cup \left]1+\sqrt{5} ; +\infty\right[$

$f'(x) < 0$ si $\left]1-\sqrt{5} ; 1\right[\cup \left]1 ; 1+\sqrt{5}\right[$.

2) *Etudier les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.*

On pose : $X = x - 1$, donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{5}{x-1} = \lim\limits_{X \to -\infty} \frac{5}{X} = 0^-$ et par somme : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

De même : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

On pose : $X = x-1$, donc : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \dfrac{5}{x-1} = \lim\limits_{X \to 0^+} \dfrac{5}{X} = +\infty$ et par somme : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \dfrac{5}{x-1} = \lim\limits_{X \to 0^-} \dfrac{5}{X} = -\infty$ et par somme : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = -\infty$

3) *Etablir le tableau de variation complet de la fonction* f *.*

x	$-\infty$		$1-\sqrt{5}$		1		$1-\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$0,528$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$9,472$	$\nearrow$	$+\infty$

$f\left(1-\sqrt{5}\right) \simeq 0,528$ et $f\left(1-\sqrt{5}\right) \simeq 9,472$

4) *Justifier que la fonction admet une asymptote oblique d'équation* $y = x+4$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (x+4) = \lim_{x \to +\infty} \frac{5}{x-1}$$

On pose : $X = x-1$, donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5}{x-1} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{5}{X} = 0^+$

La courbe représentant la fonction f admet la droite d'équation $y = x+4$ comme asymptote oblique en $+\infty$ et se trouve au-dessus de cette asymptote.

De même : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5}{x-1} = \lim\limits_{X \to -\infty} \dfrac{5}{X} = 0^-$

La courbe représentant la fonction f admet la droite d'équation $y = x+4$ comme asymptote oblique en $-\infty$ et se trouve au-dessous de cette asymptote.