Exercices sur le T.V.I.

Exercice 2A.1 :

Soit la fonction $f(x)=x^3-4x^2+5x+2$ et (C) sa courbe représentative.

1) Donner le domaine de définition de la fonction *f*.
2) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3) Calculer la dérivée de f et étudier son signe.
4) Construire le tableau complet des variations de *f*.
5) Résoudre l'équation $f(x)=0$ en donnant une valeur approchée au centième de la solution x_0 de l'équation.
6) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe au point d'abscisse $x_1=3$.

Exercice 2A.2 :

1) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3+3x-2$.
   a) Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha)=0$.
   b) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.
2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2+1}$.

   Etudier sa dérivée puis dresser le tableau de variation de f.

   (On utilisera les résultats de la partie 1).

Exercice 2A.3 :

On considère la fonction f définie sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^3}{x-1}$.

1) Étudier les variations de f.
2) Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition.
3) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=k$, selon les valeurs de *k*.

Exercice 2A.4 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par $f(x)=3x-2+\dfrac{5}{x+1}$.

1. Calculer la dérivée de f et vérifier que $f'(x)=\dfrac{3x^2+6x-2}{(x+1)^2}$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f et dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}-\{-1\}$.
3. Montrer que l'équation $f(x)=3$ admet exactement deux solutions sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ qui sont 0 et $\dfrac{2}{3}$.
4. Démontrer que l'équation $f(x)=5$ admet deux solutions sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ notées α et β. Donner les valeurs approchées de α et β au centième.
5. On note *m* un nombre réel. Discuter suivant les valeurs de *m* le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$ sur $\mathbb{R}-\{-1\}$.

Exercice 2A.1 :

$f(x)=x^3-4x^2+5x+2$ et (C) sa courbe représentative.

1) *Donner le domaine de définition de la fonction f.*

f est définie sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynômiale : $D_f=\mathbb{R}$.

2) *Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.*

$$f(x)=x^3-4x^2+5x+2=x^3\left(1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)=1 \text{ donc par produit : } \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)=1 \text{ donc par produit : } \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

3) *Calculer la dérivée de f et étudier son signe.*

f est continue et dérivable en tant que fonction polynômiale :

$f'(x)=3x^2-8x+5$ → discriminant : $\Delta=(-8)^2-4\times3\times5=64-60=4=2^2$

$\Delta>0$ donc deux racines : $x_1=\frac{8-2}{2\times3}=\frac{6}{6}=1$ et $x_1=\frac{8+2}{2\times3}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$

$a>0$: cette dérivée est positive pour $x\in\left]-\infty;1\right]\cup\left[\frac{5}{3};+\infty\right[$ et négative pour $x\in\left[1;\frac{5}{3}\right]$

4) *Construire le tableau complet des variations de f.*

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	$\frac{104}{27}$	↗	$+\infty$

$f(1)=4$, $f\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{104}{27}$

5) *Résoudre l'équation $f(x)=0$ en donnant une valeur approchée au centième de la solution x_0 de l'équation.*

f est **continue** et **strictement croissante** sur $\left]-\infty;1\right]$ avec $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $f(1)=4$

D'après le **T.V.I.**, il existe une valeur $x_0\in\left]-\infty;1\right]$ telle que $f(x_0)=0$.

Un valeur approchée au centième de la solution x_0 de l'équation est : $x_0\simeq-0,32$.

Pour tout réel x supérieur à 1 : $f(x)\geq\frac{104}{27}$ donc $f(x)\geq0$

6) *Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe au point d'abscisse $x_1=3$.*

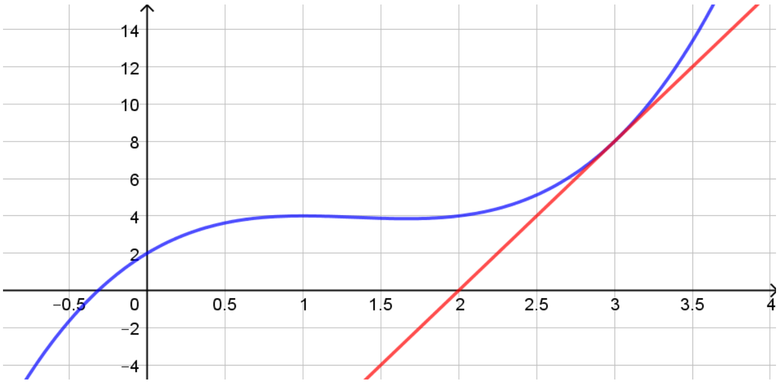
Equation de la tangente au point d'abscisse a :

T : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

Donc au point d'abscisse 3 : T : $y = f'(3)(x-3)+f(3)$

$$f'(3)=3\times 3^2-8\times 3+5=27-24+5=8 \quad \text{et} \quad f(3)=8$$

Donc : T : $y=8(x-3)+8=8x-24+8=8x-16$



Exercice 2A.2 :

1) *Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3+3x-2$.*

a) *Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha)=0$.*

$$g'(x)=3x^2+3$$

Pour tout réel x, $g'(x)>0$ et la fonction g est strictement croissante et continue.

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3\left(1+\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right) \quad \text{avec :} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^3}=0\,.$$

→ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ donc par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.

D'après le corollaire du T.V.I., il existe un unique réel α tel que $g(\alpha)=0$.

b) *Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.*
On obtient : $0{,}5<\alpha<0{,}6$.

2) *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2+1}$. Etudier sa dérivée puis dresser le tableau de variation de f. (On utilisera les résultats de la partie 1).*

f est dérivable *sur* $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions polynomiales.

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2+1)-(x^3+1)\times 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{3x^4+3x^2-2x^4-2x}{(x^2+1)^2}=\frac{x^4+3x^2-2x}{(x^2+1)^2}=\frac{x\times g(x)}{(x^2+1)^2}$$

x	$-\infty$		-1		α		0		$+\infty$
x		$-$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$		$-$	
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↘	‖	↘		↗		↘	

Seules les variations sont demandées, il n'est pas utile d'étudier les limites.

Exercice 2A.3 :

On considère la fonction f *définie sur* $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ *par* $f(x)=\dfrac{x^3}{x-1}$.

1) *Étudier les variations de* f *.*

f est dérivable *sur* $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions polynomiales.

$$f'(x)=\frac{3x^2(x-1)-x^3\times 1}{(x-1)^2}=\frac{3x^3-3x^2-x^3}{(x-1)^2}=\frac{2x^3-3x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$$

Pour tout $x\in]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$: $\dfrac{x^2}{(x-1)^2}>0$.

$$f'(x)>0 \iff 2x-3>0 \iff x>\frac{3}{2}$$

Si $x\in]-\infty;1[\cup\left]1;\dfrac{3}{2}\right[$: $f'(x)<0$ et la fonction f est décroissante par morceaux.

Si $x\in\left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[$: $f'(x)>0$ et la fonction f est strictement croissante.

2) *Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition.*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\times x^2}{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1-\dfrac{1}{x}}$$

Or : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ donc par somme et quotient : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x-1}=+\infty$.

De même : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x-1}=+\infty$

$\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}x-1=0^+$ donc : $\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{x^3}{x-1}=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}x-1=0^-$ donc : $\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{x^3}{x-1}=-\infty$

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$6,75$	↗	$+\infty$

$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=6,75$

3) *Déterminer le nombre de solutions de l'équation* $f(x)=k$*, selon les valeurs de k.*

En appliquant le TVI sur chaque domaine :

Si $k<6,75$: l'équation $f(x)=k$ n'admet qu'une seule solution

Si $k=6,75$: l'équation $f(x)=k$ admet deux solutions

Si $k>6,75$: l'équation $f(x)=k$ admet trois solutions

Exercice 2A.4 :

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par : $f(x)=3x-2+\dfrac{5}{x+1}$

1) *Calculer la dérivée de f et vérifier que $f'(x)=\dfrac{3x^2+6x-2}{(x+1)^2}$.*

f est continue et dérivable en tant que somme et quotient de fonction polynômiale :
Pour tout $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$:

$$f'(x)=3+5\times\frac{-1}{(x+1)^2}=3-\frac{5}{(x+1)^2}=\frac{3\times(x+1)^2}{(x+1)^2}-\frac{5}{(x+1)^2}=\frac{3x^2+6x+3-5}{(x+1)^2}=\frac{3x^2+6x-2}{(x+1)^2}$$

2) *Étudier le sens de variation de la fonction f et dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}-\{-1\}$.*

Le dénominateur étant toujours positif, étudions le numérateur :

$$\Delta=6^2-4\times3\times(-2)=36+24=60=4\times15=\left(2\sqrt{15}\right)^2$$

$\Delta>0$ donc deux racines : $x_1=\dfrac{-6-2\sqrt{15}}{2\times3}=\dfrac{-3-\sqrt{15}}{3}$ et $x_2=\dfrac{-6+2\sqrt{15}}{2\times3}=\dfrac{-3+\sqrt{15}}{3}$

$a>0$: cette dérivée est positive pour $x\in\left]-\infty;\dfrac{-3-\sqrt{15}}{3}\right]\cup\left[\dfrac{-3+\sqrt{15}}{3};+\infty\right[$

et négative pour $x\in\left[\dfrac{-3-\sqrt{15}}{3};-1\right[\cup\left]-1;\dfrac{-3+\sqrt{15}}{3}\right]$

x	$-\infty$		$\frac{-3-\sqrt{15}}{3}$		-1		$\frac{-3+\sqrt{15}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$		0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-5-2\sqrt{15}$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$-5+2\sqrt{15}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f\left(\frac{-3-\sqrt{15}}{3}\right)=3\times\frac{-3-\sqrt{15}}{3}-2+\frac{5}{\frac{-3-\sqrt{15}}{3}+1}=-3-\sqrt{15}-2+\frac{5}{\frac{-3-\sqrt{15}}{3}+\frac{3}{3}}=-5-\sqrt{15}+\frac{5}{\frac{-\sqrt{15}}{3}}$$

$$=-5-\sqrt{15}-\frac{5\times3}{\sqrt{15}}=-5-\sqrt{15}-\frac{15}{\sqrt{15}}=-5-\sqrt{15}-\sqrt{15}=-5-2\sqrt{15}$$

$$f\left(\frac{-3+\sqrt{15}}{3}\right)=3\times\frac{-3+\sqrt{15}}{3}-2+\frac{5}{\frac{-3+\sqrt{15}}{3}+1}=-3+\sqrt{15}-2+\frac{5}{\frac{-3+\sqrt{15}}{3}+\frac{3}{3}}=-5+\sqrt{15}+\frac{5}{\frac{\sqrt{15}}{3}}$$

$$=-5+\sqrt{15}+\frac{5\times3}{\sqrt{15}}=-5+\sqrt{15}+\frac{15}{\sqrt{15}}=-5+\sqrt{15}+\sqrt{15}=-5+2\sqrt{15}$$

Un tableau de variation n'est complet qu'après l'étude de toutes les limites.

$\lim\limits_{x\to-\infty}3x-2=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5}{x+1}=0$ donc par somme $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 3x-2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5}{x+1}=0$ donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 1} 3x-2=1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} \dfrac{5}{x+1}=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \dfrac{5}{x+1}=+\infty$

donc par somme $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=+\infty$

3) *Montrer que l'équation $f(x)=3$ admet exactement deux solutions sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ qui sont 0 et $\dfrac{2}{3}$.*

$-5-2\sqrt{15}<0$ donc la fonction f est strictement négative sur $]-\infty;-1[$.

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $\left]-1;\dfrac{-3+\sqrt{15}}{3}\right]$.

De plus, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)=-\infty$ et $f\left(\dfrac{-3+\sqrt{15}}{3}\right)=-5+2\sqrt{15}$ avec $-5+2\sqrt{15}<3$

D'après le **T.V.I.**, il existe une unique valeur x_0 sur l'intervalle $\left]-1;\dfrac{-3+\sqrt{15}}{3}\right]$ telle que $f(x_0)=3$

On vérifie que $f(0)=3$

De même, $f\left(\dfrac{-3+\sqrt{15}}{3}\right)=-5+2\sqrt{15}$ avec $-5+2\sqrt{15}<3$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \dfrac{5}{x+1}=+\infty$

D'après le **T.V.I.**, il existe une unique valeur x_1 sur l'intervalle $\left[\dfrac{-3+\sqrt{15}}{3};+\infty\right[$ telle que $f(x_1)=3$

On vérifie que $f\left(\dfrac{2}{3}\right)=3$

4) *Démontrer que l'équation $f(x)=5$ admet deux solutions sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ notées α et β . Donner les valeurs approchées de α et β au centième.*

Le raisonnement est identique pour justifier l'existence de deux solutions pour l'équation $f(x)=5$

On trouve $f(-0{,}39)\simeq(1{,}72)\simeq 5$

5) *On note m un nombre réel. Discuter suivant les valeurs de m le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$ sur $\mathbb{R}-\{-1\}$.*

Si $m\in\left]-\infty;-5-2\sqrt{15}\right[\cup\left]-5+2\sqrt{15};+\infty\right[$, l'équation $f(x)=m$ admet deux solutions.

Si $m\in\left\{-5-2\sqrt{15};-5+2\sqrt{15}\right\}$, l'équation $f(x)=m$ admet une solution.

Si $m\in\left]-5-2\sqrt{15};-5+2\sqrt{15}\right[$, l'équation $f(x)=m$ n'admet aucune solution.