Exercice 3A.1 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash(-1)$ par $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^3+1}$.

1) Pour tout réel $x\neq -1$, déterminer $f'(x)$.
2) On considère la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x)=-x^3-3x+2$.
   a) Étudier les variations de P sur $\mathbb{R}$.
   b) En déduire que l'équation $P(x)=0$ admet une unique solution notée α sur $\mathbb{R}$.
   c) En déduire le signe de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   d) Démontrer que $0,5<\alpha<0,6$.
   e) Démontrer que $f(\alpha)=\dfrac{2}{3\alpha}$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
3) En déduire le signe de $f'(x)$ et les variations de f sur $\mathbb{R}\backslash(-1)$.

Exercice 3A.2 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par $f(x)=3x-2+\dfrac{5}{x+1}$.

1. Calculer la dérivée de f et vérifier que $f'(x)=\dfrac{3x^2+6x-2}{(x+1)^2}$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f et dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}-\{-1\}$.
3. Montrer que l'équation $f(x)=3$ admet exactement deux solutions sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ qui sont 0 et $\dfrac{2}{3}$.
4. Démontrer que l'équation $f(x)=5$ admet deux solutions sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ notées α et β. Donner les valeurs approchées de α et β au centième.
5. On note m un nombre réel. Discuter suivant les valeurs de m le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$ sur $\mathbb{R}-\{-1\}$.

Exercice 3A.3 :

Partie A

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=3x^3-4x-8$ et $\mathcal{C}$ est sa courbe représentative dans le plan. ( ) 3

1) Déterminer l'expression de $g'(x)$.
2) Étudier le signe de $g'(x)$ selon les valeurs de x. En déduire les variations de g.
3) Démontrer que l'équation $g(x)=0$ a une et une seule solution dans $\mathbb{R}$.
   Donner un encadrement d'amplitude 0,01 de cette solution, que l'on notera α.
4) Déterminer le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3}{4}x+1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$ et $\mathcal{C}$' est sa courbe représentative dans le plan.

1) f' étant la fonction dérivée de f, démontrer que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{4x^3}$.
2) Étudier les variations de f.
3) $\mathcal{D}$ est la droite d'équation $y=\dfrac{3}{4}x+1$. Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}$' par rapport à $\mathcal{D}$.
4) Tracer $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$'.

Exercice 3A.1 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus(-1)$ par $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^3+1}$.

1) Pour tout réel $x\neq -1$, déterminer $f'(x)$.

f est dérivable *sur* $\mathbb{R}\setminus(-1)$ en tant que quotient de fonctions polynomiales.

$$f'(x)=\frac{2x\left(x^3+1\right)-\left(x^2+1\right)\times 3x^2}{\left(x^3+1\right)^2}=\frac{2x^4+2x-3x^4-3x^2}{\left(x^3+1\right)^2}=\frac{-x^4-3x^2+2x}{\left(x^3+1\right)^2}=\frac{x\left(-x^3-3x+2\right)}{\left(x^3+1\right)^2}$$

2) *On considère la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x)=-x^3-3x+2$.*

a) *Étudier les variations de P sur $\mathbb{R}$.*

$$P'(x)=-3x^2-3=-3\left(x^2+1\right)$$

La dérivée est strictement négative donc la fonction P est décroissante sur $\mathbb{R}$.

b) *En déduire que l'équation $P(x)=0$ admet une unique solution notée α sur $\mathbb{R}$.*

$$P(0)=2 \text{ et } P(1)=-1^3-3\times 1+2=-1-3+2=-2$$

La fonction P est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, avec $P(0)=2$ et $P(1)=-2$.

D'après le corollaire du T.V.I., il existe un unique réel $\alpha\in\left]0;1\right[$ tel que $P(\alpha)=0$.

c) *En déduire le signe de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$.*

D'après ce qui précède :

Si $x<\alpha$: $P(x)>0$

Si $x>\alpha$: $P(x)<0$

d) *Démontrer que $0,5<\alpha<0,6$.*

$$P(0,5)=0,375 \text{ et } P(0,6)=-0,016$$

Donc : $0,5<\alpha<0,6$

e) *Démontrer que $f(\alpha)=\dfrac{2}{3\alpha}$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.*

$$P(\alpha)=0 \Leftrightarrow -\alpha^3-3\alpha+2=0$$
$$\Leftrightarrow \alpha^3=-3\alpha+2$$

Deux méthodes :

$$f(\alpha)=\frac{\alpha^2+1}{\alpha^3+1}=\frac{\alpha^2+1}{-3\alpha+2+1}=\frac{\alpha^2+1}{-3\alpha+3}=\frac{\alpha^2+1}{3(1-\alpha)}\times\frac{\alpha}{\alpha}=\frac{\alpha^3+\alpha}{3\alpha(1-\alpha)}=\frac{-3\alpha+2+\alpha}{3\alpha(1-\alpha)}$$
$$=\frac{-2\alpha+2}{3\alpha(1-\alpha)}=\frac{2(1-\alpha)}{3\alpha(1-\alpha)}=\frac{2}{3\alpha}$$

$$f(\alpha)-\frac{2}{3\alpha}=\frac{\alpha^2+1}{\alpha^3+1}-\frac{2}{3\alpha}=\frac{\left(\alpha^2+1\right)\times 3\alpha}{\left(\alpha^3+1\right)\times 3\alpha}-\frac{2\left(\alpha^3+1\right)}{3\alpha\left(\alpha^3+1\right)}=\frac{3\alpha^3+3\alpha}{\left(\alpha^3+1\right)\times 3\alpha}-\frac{2\alpha^3+2}{3\alpha\left(\alpha^3+1\right)}$$
$$=\frac{\alpha^3+\alpha-2}{\left(\alpha^3+1\right)\times 3\alpha}=\frac{-\left(-\alpha^3-\alpha+2\right)}{\left(\alpha^3+1\right)\times 3\alpha}=\frac{-P(\alpha)}{\left(\alpha^3+1\right)\times 3\alpha}=0$$

Ainsi d'après l'encadrement de α :

$$0,5<\alpha<0,6$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{0,5}>\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{0,6}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\times\frac{2}{3} > \frac{1}{\alpha}\times\frac{2}{3} > \frac{10}{6}\times\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{4}{3} > f(\alpha) > \frac{10}{9}$$

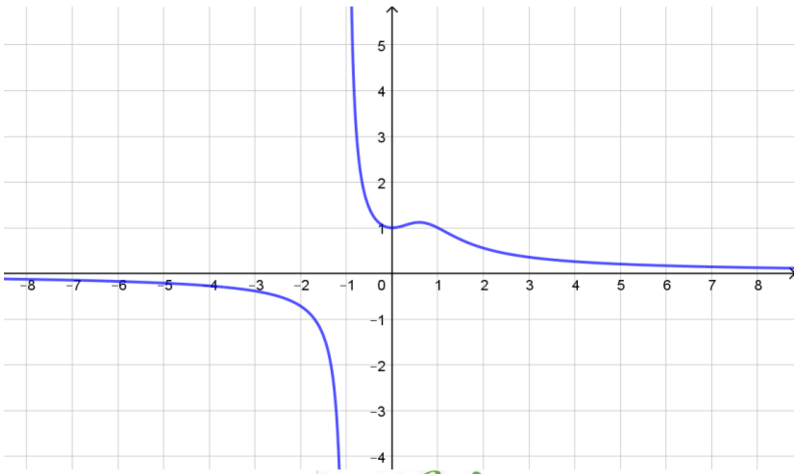
Ainsi : $\frac{10}{9} < f(\alpha) < \frac{4}{3}$.

3) *En déduire le signe de $f'(x)$ et les variations de f sur $\mathbb{R}\setminus(-1)$.*

$$f'(x) = \frac{x\times P(x)}{\left(x^3+1\right)^2}$$

x	$-\infty$		-1		α		0		$+\infty$
x		$-$	||	$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$+$	||	$+$	0	$-$		$-$	
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↘	||	↘		↗		↘	

Seules les variations sont demandées, les études de limites ne sont pas nécessaires.



Exercice 3A.2 :

La fonction *f* est définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par : $f(x) = 3x-2+\frac{5}{x+1}$

1) f est continue et dérivable en tant que somme et quotient de fonction polynômiale :

Pour tout $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$:

$$f'(x) = 3+5\times\frac{-1}{(x+1)^2} = 3-\frac{5}{(x+1)^2} = \frac{3\times(x+1)^2}{(x+1)^2}-\frac{5}{(x+1)^2} = \frac{3x^2+6x+3-5}{(x+1)^2} = \frac{3x^2+6x-2}{(x+1)^2}$$

2) Le dénominateur étant toujours positif, étudions le numérateur :

$$\Delta = 6^2-4\times3\times(-2) = 36+24 = 60 = 4\times15 = \left(2\sqrt{15}\right)^2$$

$\Delta > 0$ donc deux racines : $x_1 = \frac{-6-2\sqrt{15}}{2\times3} = \frac{-3-\sqrt{15}}{3}$ et $x_2 = \frac{-6+2\sqrt{15}}{2\times3} = \frac{-3+\sqrt{15}}{3}$

$a>0$: cette dérivée est positive pour $x\in\left]-\infty;\frac{-3-\sqrt{15}}{3}\right]\cup\left[\frac{-3+\sqrt{15}}{3};+\infty\right[$

et négative pour $x \in \left[\dfrac{-3-\sqrt{15}}{3};-1\right[\cup \left]-1;\dfrac{-3+\sqrt{15}}{3}\right]$

x	$-\infty$		$\frac{-3-\sqrt{15}}{3}$		-1		$\frac{-3+\sqrt{15}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-5-2\sqrt{15}$	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$-5+2\sqrt{15}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f\left(\frac{-3-\sqrt{15}}{3}\right)=3\times\frac{-3-\sqrt{15}}{3}-2+\frac{5}{\frac{-3-\sqrt{15}}{3}+1}=-3-\sqrt{15}-2+\frac{5}{\frac{-3-\sqrt{15}}{3}+\frac{3}{3}}=-5-\sqrt{15}+\frac{5}{\frac{-\sqrt{15}}{3}}$$

$$=-5-\sqrt{15}-\frac{5\times3}{\sqrt{15}}=-5-\sqrt{15}-\frac{15}{\sqrt{15}}=-5-\sqrt{15}-\sqrt{15}=-5-2\sqrt{15}$$

$$f\left(\frac{-3+\sqrt{15}}{3}\right)=3\times\frac{-3+\sqrt{15}}{3}-2+\frac{5}{\frac{-3+\sqrt{15}}{3}+1}=-3+\sqrt{15}-2+\frac{5}{\frac{-3+\sqrt{15}}{3}+\frac{3}{3}}=-5+\sqrt{15}+\frac{5}{\frac{\sqrt{15}}{3}}$$

$$=-5+\sqrt{15}+\frac{5\times3}{\sqrt{15}}=-5+\sqrt{15}+\frac{15}{\sqrt{15}}=-5+\sqrt{15}+\sqrt{15}=-5+2\sqrt{15}$$

Un tableau de variation n'est complet qu'après l'étude de toutes les limites.

$\lim\limits_{x\to-\infty} 3x-2=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5}{x+1}=0$ donc par somme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 3x-2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5}{x+1}=0$ donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to1} 3x-2=1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\dfrac{5}{x+1}=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\dfrac{5}{x+1}=+\infty$

donc par somme $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=+\infty$

3) $-5-2\sqrt{15}<0$ donc la fonction f est strictement négative sur $]-\infty;-1[$.

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $\left]-1;\dfrac{-3+\sqrt{15}}{3}\right]$.

De plus, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)=-\infty$ et $f\left(\dfrac{-3+\sqrt{15}}{3}\right)=-5+2\sqrt{15}$ avec $-5+2\sqrt{15}<3$

D'après le **T.V.I.**, il existe une unique valeur x_0 sur l'intervalle $\left]-1;\dfrac{-3+\sqrt{15}}{3}\right]$ telle que $f(x_0)=3$

On vérifie que $f(0)=3$

De même, $f\left(\dfrac{-3+\sqrt{15}}{3}\right)=-5+2\sqrt{15}$ avec $-5+2\sqrt{15}<3$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\dfrac{5}{x+1}=+\infty$

D'après le **T.V.I.**, il existe une unique valeur x_1 sur l'intervalle $\left[\dfrac{-3+\sqrt{15}}{3};+\infty\right[$ telle que $f(x_1)=3$

On vérifie que $f\left(\frac{2}{3}\right)=3$

4) Le raisonnement est identique pour justifier l'existence de deux solutions pour l'équation $f(x)=5$

On trouve $f(-0,39)\simeq(1,72)\simeq 5$

5) Si $m\in\left]-\infty;-5-2\sqrt{15}\right[\cup\left]-5+2\sqrt{15};+\infty\right[$, l'équation $f(x)=m$ admet deux solutions.

Si $m\in\left\{-5-2\sqrt{15};-5+2\sqrt{15}\right\}$, l'équation $f(x)=m$ admet une solution.

Si $m\in\left]-5-2\sqrt{15};-5+2\sqrt{15}\right[$, l'équation $f(x)=m$ n'admet aucune solution.

Exercice 3A.3 :

Partie A

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=3x^3-4x-8$ et $\mathcal{C}$ est sa courbe représentative dans le plan.

1) *Déterminer l'expression de $g'(x)$.*

$$g'(x)=9x^2-4$$

2) *Étudier le signe de $g'(x)$ selon les valeurs de x. En déduire les variations de g.*

$$g'(x)>0 \iff 9x^2-4>0 \iff x^2>\frac{4}{9}$$

Si $x\in\left]-\infty;-\frac{2}{3}\right[\cup\left]\frac{2}{3};+\infty\right[$: $g'(x)>0$ et la fonction g est strictement croissante par morceaux

Si $x\in\left]-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right[$: $g'(x)<0$ et la fonction g est strictement décroissante.

3) *Démontrer que l'équation $g(x)=0$ a une et une seule solution dans $\mathbb{R}$.*

Donner un encadrement d'amplitude 0,01 de cette solution, que l'on notera α.

Etude des limites :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3\left(3-\frac{4}{x^2}-\frac{8}{x^3}\right) \text{ avec : } \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8}{x^3}=0$$

donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ et de même : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$

$$g\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{56}{9}\simeq-6,222 \text{ et } g\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{88}{9}\simeq-9,778$$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	0	+	
g	$-\infty$	↗	$-6,222$	↘	$-9,778$	↗	$+\infty$

Pour tout $x\in\left]-\infty;\frac{2}{3}\right]$: $g(x)<0$: l'équation $g(x)=0$ n'admet aucune solution.

La fonction g est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left[\frac{2}{3};+\infty\right[$ avec $g\left(\frac{2}{3}\right)\simeq-9,778$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, d'après le corollaire du T.V.I., il existe un unique réel α tel que $g(\alpha)=0$.

On trouve : $1,70<\alpha<1,71$.

4) *Déterminer le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.*

Si $x<\alpha$: $g(x)<0$

Si $x>\alpha$: $g(x)>0$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{3}{4}x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$ et $\mathcal{C}$' est sa courbe représentative dans le plan.

1) *f' étant la fonction dérivée de f, démontrer que $f'(x)=\frac{g(x)}{4x^3}$.*

$$f'(x)=\frac{3}{4}-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}=\frac{3x^3-4x-8}{4x^3}=\frac{g(x)}{4x^3}$$

2) *Étudier les variations de f.*

Si $x<0$: $g(x)<0$ donc : $f'(x)>0$ et la fonction est croissante sur $]-\infty;0[$

Si $0\le x<\alpha$: $g(x)<0$ donc : $f'(x)<0$ et la fonction est décroissante sur $]0;\alpha[$

Si $x>\alpha$: $g(x)>0$ donc : $f'(x)>0$ et la fonction est croissante sur $]\alpha;+\infty[$

3) *$\mathcal{D}$ est la droite d'équation $y=\frac{3}{4}x+1$. Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}$' par rapport à $\mathcal{D}$.*

$$f(x)-\left(\frac{3}{4}x+1\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$$

Si $x>0$: $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0$: la courbe $\mathcal{C}$' est au-dessus de la droite $\mathcal{D}$.

Si $x<0$: étude du signe de $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2}>-\frac{1}{x}>0$$

$$\Leftrightarrow x^2<-x$$

$$\Leftrightarrow x^2+x<0$$

$$\Leftrightarrow x(x+1)<0$$

Or : $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$

La courbe $\mathcal{C}$' et la droite $\mathcal{D}$ sont sécantes au point d'abscisse -1.

→si $x\in]-1;0[$: $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0$: la courbe $\mathcal{C}$' est au-dessus de la droite $\mathcal{D}$.

→si $x<-1$: $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}<0$: la courbe $\mathcal{C}$' est au-dessous de la droite $\mathcal{D}$.

4) *Tracer $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$'.*