Problèmes sur le T.V.I.

Exercice 4A.1 : (Fonction rationnelle)

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

g est la fonction définie par : $g(x)=x^3-3x-4$.

1) Etudier les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
2) Etudier les variations de g.
3) Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution que l'on note α . En donner une approximation à 10^{-3} près.
4) En déduire le signe de la fonction g (la réponse sera soigneusement justifiée).

Partie B : Etude de la fonction *f*

1) Déterminer les limites de *f* aux bornes de son ensemble de définition D, à déterminer.
2) Montrer que pour tout *x* de D, $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$. En déduire le tableau de variation de la fonction *f*.
3) Démontrer que la droite Δ d'équation $y=x+2$ est asymptote à (C), puis étudier la position relative de ces deux courbes.
4) Tracer la droite Δ et la courbe (C).

Partie C : Nombre de solutions d'une équation

1) Déterminer les abscisses des points de la courbe (C) où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y=x+2$.
2) Déterminer une équation de chacune de ces tangentes et les représenter.
3) En déduire graphiquement, suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation $f(x)=x+m$.

Exercice 4A.2 : (Fonction rationnelle)

1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=4x^3-3x-8$.
   a. Etudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.
   b. Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution que l'on note α.
      Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
   c. Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$.
2) Soit *f* la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x^3+1}{4x^2-1}$.
   a. Démontrer que le signe de $f'(x)$ est le même que le signe de $g(x)$ sur $[1;+\infty[$.
   b. En déduire le sens de variation de *f* sur $[1;+\infty[$.
   c. En utilisant la définition de α , démontrer que : $f(\alpha)=\dfrac{3}{8}\alpha$.
      En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 4A.1 : $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1}$ et (C) sa courbe représentative.

Partie A : $g(x)=x^3-3x-4$

1) *Etudier les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.*

$$g(x)=x^3-3x-4=x^3\left(1-\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^3}\right)$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^3}\right)=1$ donc par produit : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^3}\right)=1$ donc par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2) *Etudier les variations de g.*

g est continue et dérivable comme fonction polynômiale sur $\mathbb{R}$ **:**

$$g'(x)=3x^2-3=3\left(x^2-1\right) \quad \rightarrow \quad g'(x)=0 \iff x=1 \text{ ou } x=-1$$

Donc $g'(x)>0$ si $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ et g est croissante

Et $g'(x)<0$ si $x\in]-1;1[$ et g est décroissante

3) *Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution que l'on note α. En donner une approximation à 10^{-3} près.*

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$; $g(1)=1^3-3\times1-4=-6$;

$g(-1)=(-1)^3-3\times(-1)-4=-2$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-6	$\nearrow$	$+\infty$

Sur $]-\infty;-1[$, la fonction g est strictement négative.

La fonction g est continue et strictement croissante sur $[1;+\infty[$, $g(1)=-6$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

D'après le **T.V.I.**, il existe un unique réel $\alpha\in[1;+\infty[$ tel que $g(\alpha)=0$

On trouve $\alpha\simeq 2{,}196$.

4) En déduire le signe de la fonction g (la réponse sera soigneusement justifiée).

Sur l'intervalle $[1;\alpha[$, la fonction g est strictement croissante et $g(\alpha)=0$

Donc $g(x)<0$ si $x\in]-\infty;\alpha[$ et $g(x)>0$ si $x\in]\alpha;+\infty[$

Partie B :

1) *Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition D, à déterminer.*

La fonction *f* définie par $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1}$ n'existe que si $x^2-1\neq0$ soit $\begin{cases} x\neq1 \\ ou \\ x\neq-1 \end{cases}$: $D_f=\mathbb{R}/\{-1;1\}$

$$f(x)=\frac{x^3+2x^2}{x^2-1}=\frac{x^3\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{1-\frac{1}{x^2}}=x\frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)}{1-\frac{1}{x^2}}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(1+\frac{2}{x}\right)}{1-\frac{1}{x^2}}=1$ donc par produit : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(1+\frac{2}{x}\right)}{1-\frac{1}{x^2}}=1$ donc par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} x^3+2x^2=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} x^3+2x^2=3$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} x^2-1=0^+$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} x^2-1=0^-$

Donc par quotient : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} x^3+2x^2=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} x^3+2x^2=1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} x^2-1=0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} x^2-1=0^+$

Donc par quotient : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)=+\infty$

2) *Montrer que pour tout x de D,* $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{\left(x^2-1\right)^2}$. *En déduire le tableau de variation de la fonction f.*

f est continue et dérivable comme quotient de fonctions polynômiales sur $\mathbb{R}/\{-1;1\}$ **:**

$$f'(x)=\frac{\left(3x^2+4x\right)\left(x^2-1\right)-\left(x^3+2x^2\right)\times2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{3x^4-3x^2+4x^3-4x-2x^4-4x^3}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$=\frac{x^4-3x^2-4x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{x\left(x^3-3x-4\right)}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{xg(x)}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$f'(x)=0 \iff x=0 \text{ ou } g(x)=0 \iff x=\alpha$

Pour tout $x\in\mathbb{R}/\{-1;1\}$: $\left(x^2-1\right)^2>0$ et pour tout $x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]-1;0\right]$: $x\le0$

Tableau de signes de la dérivée :

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
x		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$	‖	$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$\left(x^2-1\right)^2$		$+$	‖	$+$		$+$	‖	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

Tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		-1		0		1		$2{,}2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

$$f(0)=\frac{x^3+2x^2}{x^2-1}=0 \quad \text{et} \quad f(2{,}196)\simeq 5{,}294$$

3) *Démontrer que la droite Δ d'équation $y=x+2$ est asymptote à (C), puis étudier la position relative de ces deux courbes.*

Soit Δ la droite d'équation : $y=x+2$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-\Delta(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x^2}{x^2-1}-(x+2)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x^2}{x^2-1}-\frac{(x+2)\times\left(x^2-1\right)}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x^2}{x^2-1}-\frac{x^3-x+2x^2-2}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x^2-\left(x^3-x+2x^2-2\right)}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x^2-x^3+x-2x^2+2}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\,\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0^+$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=1$ donc par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-\Delta(x)=0^+$

Donc la droite Δ est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$ et (C) est au-dessus de Δ.

De même : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0^-$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=1$ donc par produit : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-\Delta(x)=0^-$

Donc la droite Δ est asymptote à la courbe (C) en $-\infty$ et (C) est au-dessous de Δ.

AUTRE METHODE PLUS RAPIDE: faire apparaitre successivement le dénominateur dans le numérateur

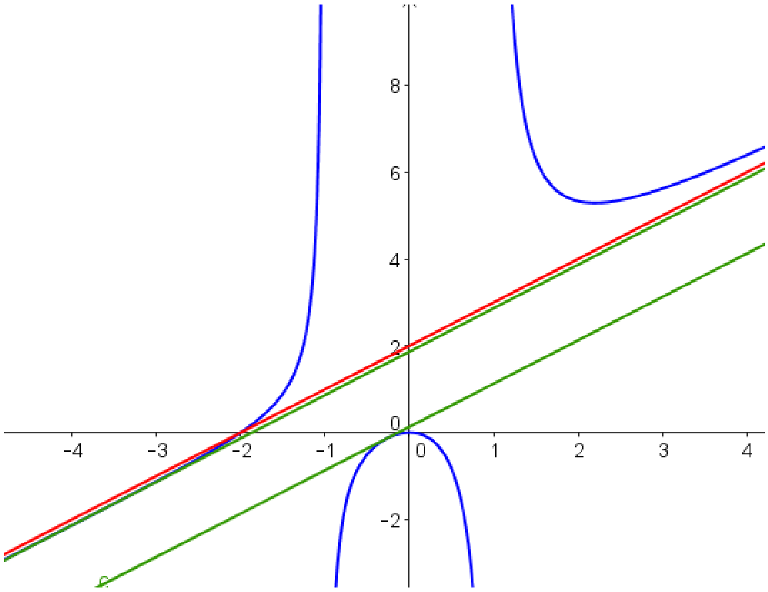
$$f(x)=\frac{x^3+2x^2}{x^2-1}=\frac{x^3-x+x+2x^2}{x^2-1}=\frac{x\left(x^2-1\right)+x+2x^2}{x^2-1}=x+\frac{2x^2+x}{x^2-1}=x+\frac{2x^2-2+2+x}{x^2-1}$$

$$=x+\frac{2\left(x^2-1\right)+2+x}{x^2-1}=x+2+\frac{x+2}{x^2-1}$$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-\Delta(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+2+\frac{x+2}{x^2-1}\right)-(x+2)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} \text{ etc}$$

4) Tracer la droite Δ et la courbe (C).



Partie C :

1) Déterminer les abscisses des points de la courbe (C) où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x + 2$.

Les abscisses des points de la courbe (C) où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x + 2$ sont les réels x vérifiant :

$$f'(x) = 1 \iff \frac{x(x^3 - 3x - 4)}{(x^2 - 1)^2} = 1 \iff x^4 - 3x^2 - 4x = (x^2 - 1)^2$$

$$\iff x^4 - 3x^2 - 4x = x^4 - 2x^2 + 1 \iff -3x^2 - 4x + 2x^2 - 1 = 0$$

$$\iff -x^2 - 4x - 1 = 0 \iff x^2 + 4x + 1 = 0$$

Discriminant : $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 1 = 12 = 2^2 \times 3$

$$\Delta > 0 \text{ donc deux racines : } x_1 = \frac{-4 - 2\sqrt{3}}{2 \times 1} = -2 - \sqrt{3} \text{ et } x_2 = \frac{-4 + +2\sqrt{3}}{2 \times 1} = -2 + \sqrt{3}$$

2) Déterminer une équation de chacune de ces tangentes et les représenter.

Tangentes en ces points :

T : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Au point d'abscisse $-2 - \sqrt{3}$: T : $y = f'(-2 - \sqrt{3})(x + 2 + \sqrt{3}) + f(-2 - \sqrt{3})$

On sait que

$$f'(-2 - \sqrt{3}) = f'(-2 + \sqrt{3}) = 1$$

$$f\left(-2-\sqrt{3}\right)=\frac{\left(-2-\sqrt{3}\right)^3+2\left(-2-\sqrt{3}\right)^2}{\left(-2-\sqrt{3}\right)^2-1}=\frac{\left(-2-\sqrt{3}\right)\left(4+4\sqrt{3}+3\right)+2\left(4+4\sqrt{3}+3\right)}{\left(4+4\sqrt{3}+3\right)-1}$$

$$=\frac{\left(-2-\sqrt{3}\right)\left(7+4\sqrt{3}\right)+2\left(7+4\sqrt{3}\right)}{6+4\sqrt{3}}=\frac{-14-8\sqrt{3}-7\sqrt{3}-12+14+8\sqrt{3}}{6+4\sqrt{3}}$$

$$=\frac{-7\sqrt{3}-12}{6+4\sqrt{3}}=\frac{-7\sqrt{3}-12}{6+4\sqrt{3}}\times\frac{6-4\sqrt{3}}{6-4\sqrt{3}}=\frac{-42\sqrt{3}-72+84+48\sqrt{3}}{6^2-\left(4\sqrt{3}\right)^2}$$

$$=\frac{12+6\sqrt{3}}{36-48}=\frac{12+6\sqrt{3}}{-12}=\frac{-2-\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{T : } y=1\left(x+2+\sqrt{3}\right)+\frac{-2-\sqrt{3}}{2}=x+2+\sqrt{3}-1-\frac{\sqrt{3}}{2}=x+1+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f\left(-2+\sqrt{3}\right)=\frac{\left(-2+\sqrt{3}\right)^3+2\left(-2+\sqrt{3}\right)^2}{\left(-2+\sqrt{3}\right)^2-1}=\frac{\left(-2+\sqrt{3}\right)\left(4-4\sqrt{3}+3\right)+2\left(4-4\sqrt{3}+3\right)}{\left(4-4\sqrt{3}+3\right)-1}$$

$$=\frac{\left(-2+\sqrt{3}\right)\left(7-4\sqrt{3}\right)+2\left(7-4\sqrt{3}\right)}{6-4\sqrt{3}}=\frac{-14+8\sqrt{3}+7\sqrt{3}-12+14-8\sqrt{3}}{6-4\sqrt{3}}$$

$$=\frac{7\sqrt{3}-12}{6-4\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{3}-12}{6-4\sqrt{3}}\times\frac{6+4\sqrt{3}}{6+4\sqrt{3}}=\frac{42\sqrt{3}-72+84-48\sqrt{3}}{6^2-\left(4\sqrt{3}\right)^2}$$

$$=\frac{12-6\sqrt{3}}{36-48}=\frac{12-6\sqrt{3}}{-12}=\frac{-2+\sqrt{3}}{2}$$

Au point d'abscisse $-2+\sqrt{3}$:

$$\text{T : } y=f'\left(-2+\sqrt{3}\right)\left(x+2-\sqrt{3}\right)+f\left(-2+\sqrt{3}\right)$$

$$y=1\left(x+2-\sqrt{3}\right)+\frac{-2+\sqrt{3}}{2}=x+2-\sqrt{3}-1+\frac{\sqrt{3}}{2}=x+1-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3) *En déduire graphiquement, suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation* $f(x)=x+m$.

Si $m\in\left]-\infty;1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right[\cup\left]1+\frac{\sqrt{3}}{2};+\infty\right[$, l'équation $f(x)=m$ admet deux solutions.

Si $m\in\left\{-1-\frac{\sqrt{3}}{2};1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$, l'équation $f(x)=m$ admet une solution.

Si $m\in\left]-1-\frac{\sqrt{3}}{2};1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right[$, l'équation $f(x)=m$ n'admet aucune solution.

Exercice 4A.2 :

1) *Soit g la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $g(x)=4x^3-3x-8$.

a. *Etudier le sens de variation de g sur* $\mathbb{R}$.

La fonction g est dérivable en tant que fonction polynômiale :

$\forall x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = 12x^2 - 3 = 3\left(4x^2 - 1\right)$

$$g'(x) > 0 \iff 4x^2 - 1 > 0 \iff x^2 > \frac{1}{4} \iff x \in \left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$$

On peut aussi calculer le déterminant : $\Delta = 0^2 - 4 \times 12 \times (-1) = 48$, les racines sont $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$.

$a = 4$: la parabole est orientée vers le haut (le polynôme est positif à l'extérieur des racines)

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-7	$\searrow$	-9	$\nearrow$	$+\infty$

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(-\frac{1}{2}\right) - 8 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 8 = -7 \quad \text{et} \quad g\left(\frac{1}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right) - 8 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} - 8 = -9$$

$$\lim_{x \to +\infty} 4x^3 - 3x - 8 = \lim_{x \to +\infty} x^3\left(4 - \frac{3}{x^2} - \frac{8}{x^3}\right) \text{ avec } \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{8}{x^3} = 0$$

donc par somme et par produit : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} 4x^3 - 3x - 8 = \lim_{x \to -\infty} x^3\left(4 - \frac{3}{x^2} - \frac{8}{x^3}\right) \text{ avec } \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{8}{x^3} = 0$$

donc par somme et par produit : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$

b. *Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution que l'on note α.*

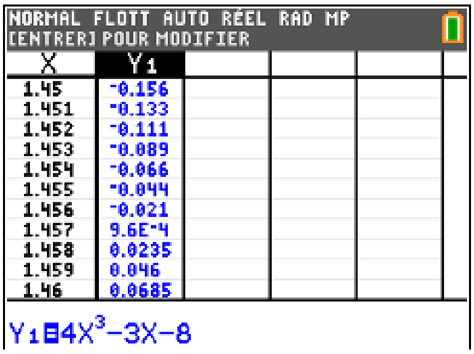
Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

$$\forall x \in \left]-\infty ; \frac{1}{2}\right[\ : \ g(x) < 0.$$

La fonction g est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ avec $g\left(\frac{1}{2}\right) = -9$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$, d'après le corollaire du TVI, il existe une unique valeur $\alpha \in \left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ telle que $g(\alpha) = 0$.

On obtient : $1,45 < \alpha < 1,46$.



X	Y1
1.45	-0.156
1.451	-0.133
1.452	-0.111
1.453	-0.089
1.454	-0.066
1.455	-0.044
1.456	-0.021
1.457	9.6E-4
1.458	0.0235
1.459	0.046
1.46	0.0685

Y1=4X³-3X-8

c. *Déterminer le signe de g sur* $\mathbb{R}$.

Par lecture du tableau de variation de g, on obtient :

$$\text{Si } x \in \left]-\infty ; \frac{1}{2}\right[\ : \ g(x) < 0$$

$$\text{Si } x \in \left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[\ : \ g(x) > 0$$

2) *Soit* f *la fonction définie sur* $[1;+\infty[$ *par :* $f(x) = \dfrac{x^3+1}{4x^2-1}$.

a. *Démontrer que le signe de* $f'(x)$ *est le même que le signe de* $g(x)$ *sur* $[1;+\infty[$.

La fonction f est dérivable en tant que quotient de fonctions polynômiales, le dénominateur ne s'annulant pas sur $[1;+\infty[$:

$$\forall x \in [1;+\infty[\ : \ f'(x) = \frac{3x^2\left(4x^2-1\right)-\left(x^3+1\right)\times 8x}{\left(4x^2-1\right)^2} = \frac{12x^4-3x^2-8x^4-8x}{\left(4x^2-1\right)^2}$$

$$= \frac{4x^4-3x^2-8x}{\left(4x^2-1\right)^2} = \frac{x\left(4x^3-3x-8\right)}{\left(4x^2-1\right)^2} = \frac{x \times g(x)}{\left(4x^2-1\right)^2}$$

$\forall x \in [1;+\infty[\ : \ \dfrac{x}{\left(4x^2-1\right)^2} > 0$ donc la dérivée est du signe de la fonction g.

b. *En déduire le sens de variation de f sur* $[1;+\infty[$.

Si $x \in [1;\alpha[\ : \ f'(x) < 0$ et la fonction f est décroissante ;

Si $x \in]\alpha;+\infty[\ : \ f'(x) > 0$ et la fonction f est croissante.

c. *En utilisant la définition de α , démontrer que :* $f(\alpha) = \dfrac{3}{8}\alpha$.

En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^3+1}{4\alpha^2-1}$$

Or d'après la première partie :

$$g(\alpha) = 0 \iff 4\alpha^3 - 3\alpha - 8 = 0 .$$

Donc :

$$4\alpha^3 = 3\alpha + 8 \iff \alpha^3 = \frac{3\alpha+8}{4} = \frac{3\alpha}{4} + 2$$

$$\alpha^2 = \frac{\alpha^3}{\alpha} = \frac{3\alpha+8}{4\alpha} = \frac{3}{4} + \frac{2}{\alpha}$$

Ainsi :

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^3+1}{4\alpha^2-1} = \frac{\frac{3\alpha}{4}+2+1}{4\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{\alpha}\right)-1} = \frac{\frac{3\alpha}{4}+3}{3+\frac{8}{\alpha}-1} = \frac{\frac{3\alpha}{4}+\frac{12}{4}}{2+\frac{8}{\alpha}} = \frac{\frac{3\alpha+12}{4}}{\frac{2\alpha+8}{\alpha}}$$

$$= \frac{3\alpha + 12}{4} \times \frac{\alpha}{2\alpha + 8} = \frac{3(\alpha + 4)}{4} \times \frac{\alpha}{2(\alpha + 4)} = \frac{3\alpha}{8}$$

Or : $1,45 < \alpha < 1,46$

$\Leftrightarrow \frac{3}{8} \times 1,45 < \frac{3}{8} \times \alpha < \frac{3}{8} \times 1,46$

$\Leftrightarrow 0,54375 < f(\alpha) < 0,54750$

→il s'agit d'un encadrement à 4×10^{-3} près.