Exercices à prise d'initiative

Exercice 1

Combien les courbes d'équations suivantes ont-elles de points communs ?

$$y=\frac{1}{2}x^3-4x^2-4x+5 \quad \text{et} \quad y=3x^2+\frac{9}{2}x-10$$

Exercice 2

Soit une fonction f définie et continue sur l'intervalle $[0;1]$ qui prend ses valeurs dans l'intervalle $[0;1]$.

Démontrer que l'équation $f(x)=x$ admet au moins une solution.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^3-\frac{15}{2}x^2-8x+6$.

La courbe de f dans un repère orthogonal admet-elle des tangentes passant par l'origine ?

Exercice 4 **(pour entrer à Oxford)**

Résoudre l'équation : $x^3-300x=3000$.

Exercice 5

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{e^{x^2+x}}$.

   Montrer qu'il existe un réel α tel que $f(\alpha)=\frac{1}{e^3}\times\frac{1}{\alpha^5}$.

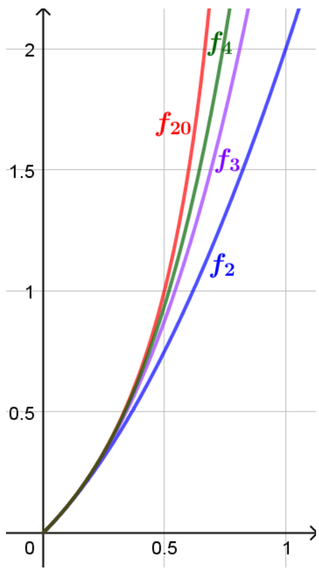
2) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\frac{2}{e^{-x^2-2x}}$.

   Montrer qu'il existe un réel $\beta\geq 1$ tel que $g(\beta)=4e^5\beta^7$.

Exercice 6

Soit un entier $n\geq 2$.

On considère la fonction définie sur $[0;1]$ par $f_n(x)=x+x^2+...+x^n$.



1) Démontrer que l'équation $x+x^2+...+x^n=1$ admet une unique solution sur $[0;1]$.

   On note a_n cette solution.

2) On a tracé les courbes des fonctions f_2, f_3, f_4, f_{20}.

   Déterminer graphiquement une valeur approchée de a_2, a_3, a_4, a_{20}.

   Conjecturer le sens de variation de (a_n) et sa limite.

3) Déterminer la valeur exacte de a_2.

4) Pour $x\in[0;1]$, comparer $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$.

5) Démontrer que pour $n\geq 2$, $f_{n+1}(a_n)\geq 1$.

   En déduire le sens de variation de (a_n).

6) Justifier que pour $n\geq 2$, $0\leq a_n\leq\frac{3}{4}$.

7) En déduire que la suite (a_n) converge. On note ℓ sa limite.

8) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(a_n)=\frac{1}{1-\ell}-1$.

   En déduire la valeur de ℓ.

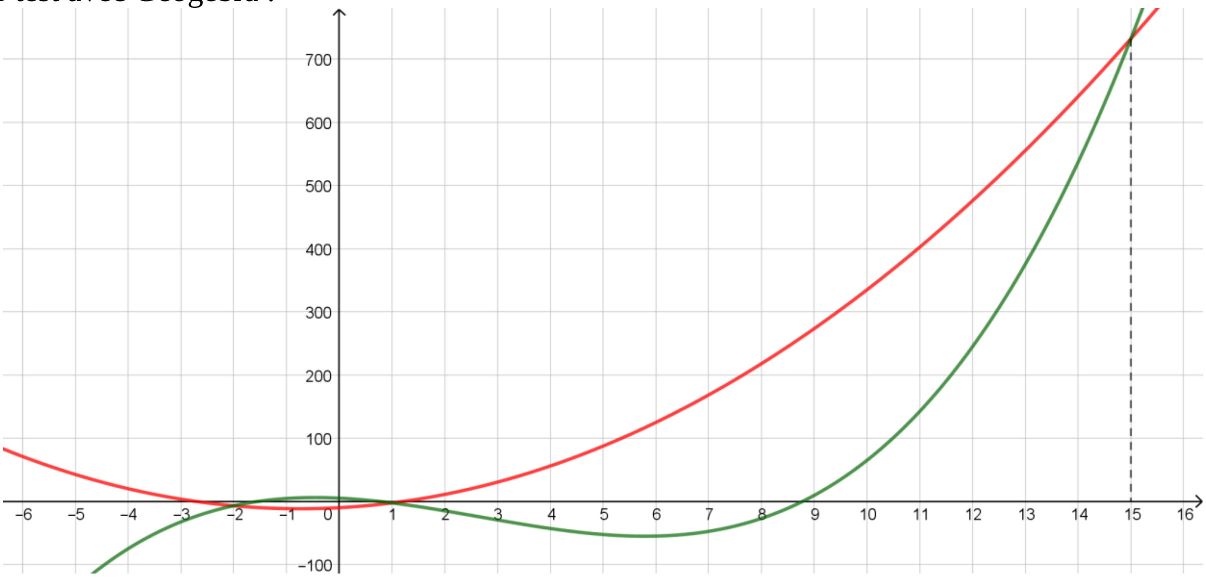
CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 1 :

Combien les courbes d'équations suivantes ont-elles de points communs ?

$$y=\frac{1}{2}x^3-4x^2-4x+5 \quad et \quad y=3x^2+\frac{9}{2}x-10$$

Premier test avec Geogebra :



Il semblerait qu'il y ait trois solutions.

On pose la fonction définie comme étant la différence des deux premières fonctions :

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}x^3-4x^2-4x+5\right)-\left(3x^2+\frac{9}{2}x-10\right)$$

$$=\frac{1}{2}x^3-4x^2-4x+5-3x^2-\frac{9}{2}x+10=\frac{1}{2}x^3-7x^2-\frac{17}{2}x+15$$

f est dérivable en tant que fonction polynômiale :

$$f'(x)=\frac{1}{2}\times 3x^2-7\times 2x-\frac{17}{2}=\frac{3}{2}x^2-14x-\frac{17}{2}$$

$\Delta=(-14)^2-4\times\frac{3}{2}\times\left(-\frac{17}{2}\right)=196+51=247 \rightarrow \Delta>0$, il y a deux solutions :

$$x_1=\frac{-(-14)-\sqrt{247}}{2\times\frac{3}{2}}=\frac{14-\sqrt{247}}{3} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-(-14)+\sqrt{247}}{2\times\frac{3}{2}}=\frac{14+\sqrt{247}}{3}$$

$a=\frac{3}{2}$ donc le polynôme est orienté « vers le haut » donc :

$$\text{Si } x\in\left]\frac{14-\sqrt{247}}{3};\frac{14+\sqrt{247}}{3}\right[\; : \; f'(x)<0$$

$$\text{Si } x\in\left]-\infty;\frac{14-\sqrt{247}}{3}\right[\cup\left]\frac{14+\sqrt{247}}{3};+\infty\right[\; : \; f'(x)>0$$

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$\frac{14-\sqrt{247}}{3}$		$\frac{14+\sqrt{247}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	$17{,}5$	↘	$-270{,}1$	↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}x^3 - 7x^2 - \frac{17}{2}x + 15 = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(\frac{1}{2} - \frac{7x^2}{x^3} - \frac{\frac{17}{2}x}{x^3} + \frac{15}{x^3}\right) = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(\frac{1}{2} - \frac{7}{x} - \frac{17}{2}\times\frac{1}{x^2} + \frac{15}{x^3}\right)$$

or $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2} - \frac{7}{x} - \frac{17}{2}\times\frac{1}{x^2} + \frac{15}{x^3} = \frac{1}{2}$ donc par produit $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

De même : $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2} - \frac{7}{x} - \frac{17}{2}\times\frac{1}{x^2} + \frac{15}{x^3} = \frac{1}{2}$ donc par produit $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$f\left(\frac{14-\sqrt{247}}{3}\right) \simeq 17{,}5$ et $f\left(\frac{14+\sqrt{247}}{3}\right) \simeq -270{,}1$

La fonction f est continue et strictement croissante sur $\left]-\infty;\frac{14-\sqrt{247}}{3}\right[$.

De plus, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $f\left(\frac{14-\sqrt{247}}{3}\right) \simeq 17{,}5$

D'après le corollaire du TVI, la fonction f s'annule une unique fois sur cette intervalle.
Par un raisonnement analogue, on montre que f s'annule également une fois sur chacun des autres intervalles.
Les deux courbes ont donc trois points en commun.

Exercice 2 :

Soit une fonction f définie et continue sur l'intervalle $[0;1]$ qui prend ses valeurs dans l'intervalle $[0;1]$.

Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution.

Un cas classique : on pose $g(x) = f(x) - x$.

La fonction g est continue comme différence de deux fonctions continues.
Quelques observations :

$$g(0) = f(0) - 0 = f(0) \quad \text{donc} \quad 0 \le g(0) \le 1$$

$$g(1) = f(1) - 1 \quad \text{or} \quad 0 \le f(1) \le 1 \quad \text{donc} \quad 0-1 \le f(1) - 1 \le 1-1 \quad \text{et} \quad -1 \le g(1) \le 0$$

Ce qui signifie que $g(0) \ge 0$ et $g(1) \le 0$.

La fonction g étant continue, d'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution.
On en déduit que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - \frac{15}{2}x^2 - 8x + 6$.

La courbe de f dans un repère orthogonal admet-elle des tangentes passant par l'origine ?

Un polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = 6x^2 - 15x - 8$$

L'équation de la tangente en un point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

soit : $$y = \left(6a^2 - 15a - 8\right)(x-a) + 2a^3 - \frac{15}{2}a^2 - 8a + 6$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \left(6a^2 - 15a - 8\right)x - 6a^3 + 15a^2 + 8a + 2a^3 - \frac{15}{2}a^2 - 8a + 6$$

$$\Leftrightarrow \quad y=\left(6a^2-15a-8\right)x-4a^3+\frac{15}{2}a^2+6$$

Si la tangente passe par l'origine, alors :

$$0=\left(6a^2-15a-8\right)\times 0-4a^3+\frac{15}{2}a^2+6$$

$$\Leftrightarrow \quad -4a^3+\frac{15}{2}a^2+6=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 8a^3-15a^2-12=0$$

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=8x^3-15x^2-12$

Un polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$g'(x)=24x^2-30x=6x(4x-5)$$

Si $x\in\left]0;1,25\right[$: $g'(x)<0$

Si $x\in\left]-\infty;0\right[\cup\left]1,25;+\infty\right[$: $g'(x)>0$

x	$-\infty$		0		$1,25$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-12	$\searrow$	$-19,8125$	$\nearrow$	$+\infty$

$$g(0)=-12 \quad \text{et} \quad g(1,25)=-19,8125$$

$$\lim_{x\to+\infty} 8x^3-15x^2-12=\lim_{x\to+\infty} x^3\left(8-\frac{15}{x}-\frac{12}{x^3}\right)=+\infty$$

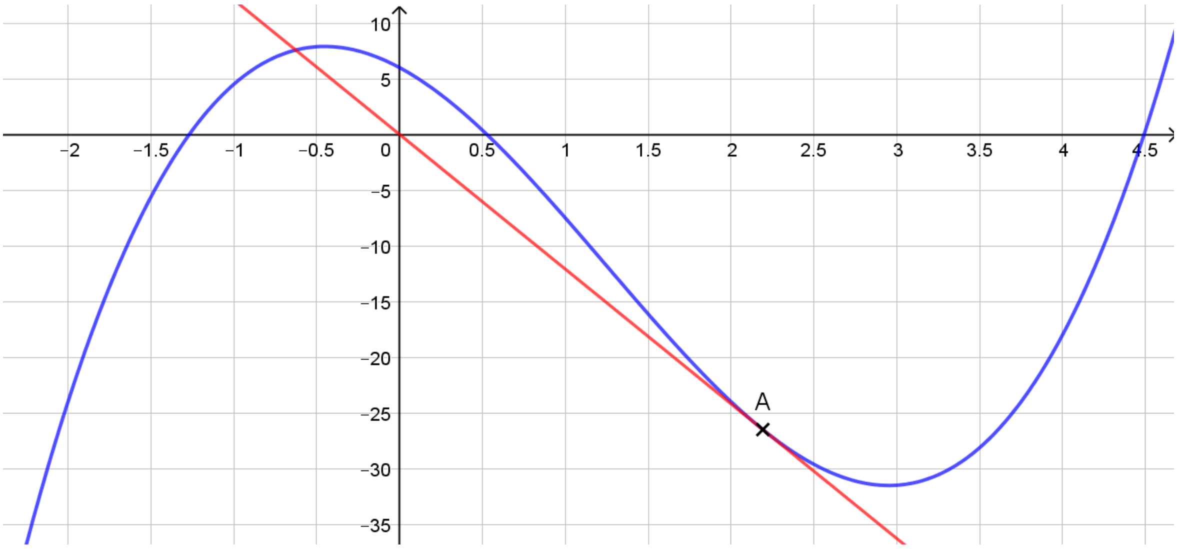
La fonction g est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left]1,25;+\infty\right[$, avec $g(1,25)=-19,8125$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$. D'après le corollaire du **TVI**, la fonction g s'annule une fois.

Par dichotomie, on trouve à 10^{-3} la valeur $2,188$.

La tangente cherchée a pour équation :

$$y=\left(6\times 2,188^2-15\times 2,188-8\right)x-4\times 2,188^3+\frac{15}{2}\times 2,188^2+6$$

$$\Leftrightarrow \quad y=-12,095936x$$



Exercice 4 (pour entrer à Oxford)

Résoudre l'équation : $x^3-300x=3000$.

Il n'y a pas de solution évidente.

On réécrit l'équation :

$$x^3-300x-3000=0.$$

On définit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que : $f(x)=x^3-300x-3000$.

Ainsi : $f'(x)=3x^2-300=3\left(x^2-100\right)=3\left(x^2-10^2\right)=3(x+10)(x-10)$

Si $x\in[-10;10]$: $f'(x)\le 0$

Si $x\in]-\infty;-10]\cup[10;+\infty[$: $f'(x)\ge 0$.

On peut dresser le tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$		-10		10		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-1000	$\searrow$	-5000	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} x^3-300x-3000=\lim_{x\to+\infty} x^3\left(1-\frac{300}{x^2}-\frac{3000}{x^3}\right)$$

$\rightarrow$or $\lim_{x\to+\infty}\frac{300}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3000}{x^3}=0$ donc par somme et produit : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

De même : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

$f(-10)=-1000$ et $f(10)=-5000$

Pour tout réel $x\in]-\infty;10]$: $f(x)\le -1000$.

Sur l'intervalle $[10;+\infty[$:

f est continue et strictement croissante, $f(10)=-5000$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

D'après le corollaire du TVI : l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in[10;+\infty[$ telle que :

$f(\alpha)=0$.

Par dichotomie : $\alpha\simeq 21{,}038$.

Exercice 5

1) *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{e^{x^2+x}}$.*

Montrer qu'il existe un réel α tel que $f(\alpha)=\frac{1}{e^3}\times\frac{1}{\alpha^5}$.

On pose : $g(x)=x^5\times f(x)$, alors l'exercice revient à montrer qu'il existe un réel α tel que :

$$g(\alpha)=\alpha^5\times\frac{1}{e^3}\times\frac{1}{\alpha^5}=\frac{1}{e^3}.$$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5}{e^{x^2+x}}=0$ par croissances comparées.

$g(1)=\frac{1^5}{e^{1^2+1}}=\frac{1}{e^2}>\frac{1}{e^3}$: il existe un réel $b\ge 1$ tel que : $g(b)\le\frac{1}{e^3}$.

Ainsi $g(b) \le \dfrac{1}{e^3} \le g(1)$ et la fonction g est continue sur l'intervalle $[1;b]$: d'après le T.V.I., il existe un réel $\alpha \in [1;b]$ tel que : $g(\alpha) = \dfrac{1}{e^3}$.

2) *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2}{e^{-x^2-2x}}$.*

Montrer qu'il existe un réel $\beta \ge 1$ tel que $f(\beta) = 4e^5\beta^7$.

On pose : $g(x) = \dfrac{1}{x^7} \times f(x)$, alors l'exercice revient à montrer qu'il existe un réel $\beta \ge 1$ tel que :

$$g(\beta) = \frac{1}{\beta^7} \times f(\beta) = \frac{1}{\beta^7} \times 4e^5\beta^7 = 4e^5.$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^7 e^{-x^2-2x}} = +\infty \text{ par croissances comparées} \\ g(1) = \dfrac{1}{1^7} \times \dfrac{2}{e^{-1^2-2\times 1}} = \dfrac{2}{e^{-3}} = 2e^3 < 4e^5 \end{cases}$$

→ il existe un réel $b \ge 1$ tel que : $g(b) \ge 4e^5$.

Ainsi $g(1) \le 4e^5 \le g(b)$ et la fonction g est continue sur l'intervalle $[1;b]$: d'après le T.V.I., il existe un réel $\beta \in [1;b]$ tel que : $g(\beta) = 4e^5$.

Exercice 6 :

Soit un entier $n \ge 2$.

On considère la fonction définie sur $[0;1]$ par $f_n(x) = x + x^2 + ... + x^n$.

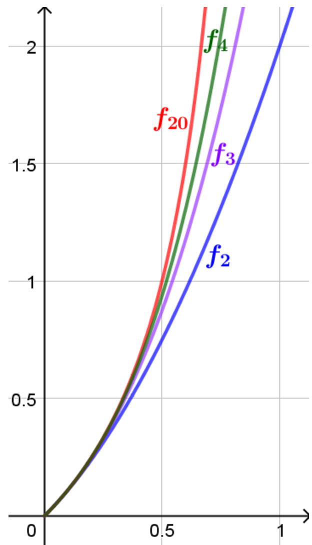
1) *Démontrer que l'équation $x + x^2 + ... + x^n = 1$ admet une unique solution sur $[0;1]$. On note a_n cette solution.*

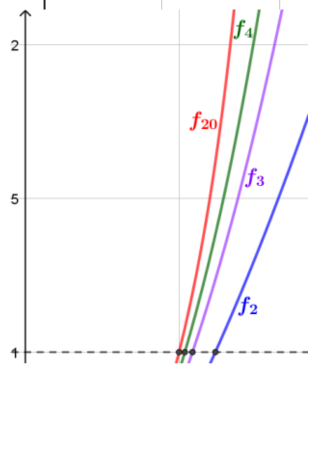
La fonction f_n est dérivable en tant que somme de fonctions polynomiales

$$f_n'(x) = 1 + 2x + ... + nx^{n-1}$$

Sur l'intervalle $[0;1]$: $f_n'(x) > 0$.

Sur l'intervalle $[0;1]$, la fonction f_n est continue et strictement croissante avec $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = n$, $n \ge 2$. D'après le corollaire du T.V.I., l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution notée a_n.





2) *On a tracé les courbes des fonctions f_2, f_3, f_4, f_{20}.*

Déterminer graphiquement une valeur approchée de a_2, a_3, a_4, a_{20}.

Conjecturer le sens de variation de (a_n) et sa limite.

Par lecture graphique :

$$a_2 \simeq 0,62,\ a_3 \simeq 0,54,\ a_4 \simeq 0,52,\ a_{20} \simeq 0,5$$

La suite (a_n) semble strictement décroissante et converger vers 0,5.

3) *Déterminer la valeur exacte de a_2.*

$$f_2(x) = 1 \iff x + x^2 = 1 \iff x^2 + x - 1 = 0$$

Discriminant : $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5$ donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

On ne garde que la solution positive : $a_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \simeq 0,618$.

4) *Pour $x \in [0;1]$, comparer $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$.*

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1}$$

$x \in [0;1]$ donc : $f_{n+1}(x) - f_n(x) > 0$.

5) *Démontrer que pour $n \geq 2$, $f_{n+1}(a_n) \geq 1$. En déduire le sens de variation de (a_n).*

On sait que $f_n(a_n) = 1$ et $f_{n+1}(a_{n+1}) = 1$, donc :

$$f_{n+1}(a_n) = a_n + a_n{}^2 + \ldots + a_n{}^n + a_n{}^{n+1} = f_n(a_n) + a_n{}^{n+1} = 1 + a_n{}^{n+1}$$

$a_n > 0$ donc : $f_{n+1}(a_n) \geq 1$.

Sur l'intervalle $[0;1]$, la fonction f_{n+1} est continue et strictement croissante :

$$f_{n+1}(a_n) \geq 1 \iff f_{n+1}(a_n) \geq f_{n+1}(a_{n+1}) \iff a_n \geq a_{n+1}$$

La suite (a_n) est décroissante.

6) *Justifier que pour $n \geq 2$, $0 \leq a_n \leq \dfrac{3}{4}$.*

Le premier terme de la suite (a_n) est $a_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \simeq 0,618$, donc :

Pour tout $n \geq 2$, $a_n \leq a_2 \leq \dfrac{3}{4}$.

D'autre part, les fonctions f_n sont positives, donc $a_n \geq 0$.

Ainsi : pour $n \geq 2$, $0 \leq a_n \leq \dfrac{3}{4}$.

7) *En déduire que la suite (a_n) converge. On note ℓ sa limite.*

La suite (a_n) est décroissante et minorée par 0 : elle est convergente vers une limite ℓ.

8) *En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(a_n) = \dfrac{1}{1-\ell} - 1$. En déduire la valeur de ℓ.*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$$

Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(a_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(\ell) = \lim\limits_{n\to+\infty} \ell + \ell^2 + \ldots + \ell^n$.

On reconnait la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme ℓ et de raison $q = \ell$.
Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(a_n) = \lim_{n\to+\infty} \ell \times \frac{1-\ell^n}{1-\ell}$$

Or : $0 \leq a_n \leq \dfrac{3}{4}$, donc : $0 \leq \ell \leq \dfrac{3}{4}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell^n = 0$.

On obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(a_n) = \ell \times \frac{1}{1-\ell} = \frac{\ell}{1-\ell} = \frac{\ell - 1 + 1}{1-\ell} = \frac{1}{1-\ell} - \frac{1-\ell}{1-\ell} = \frac{1}{1-\ell} - 1.$$