Notre Dame de La Merci

Contrôle sur la continuité

Exercice :

1) Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x)=2x^3-4x^2+2x-1$.
   a. Déterminer u', la fonction dérivée de u, puis dresser le tableau de variation de la fonction u.
   On donne $u\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{19}{27}$.
   (On ne demande pas de calculer les limites en l'infini.)
   b. Démontrer que l'équation $u(x)=0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et que $1<\alpha<2$.
   c. Déterminer un encadrement à 10^{-4} de α.
   d. En déduire le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par : $f(x)=x^2+\frac{1}{x-1}$.
   a. Déterminer les limites de f en $+\infty$, $-\infty$ et 1.
   b. Déterminer f' la fonction dérivée de f et montrer que $f'(x)=\frac{u(x)}{(x-1)^2}$.
   c. Déterminer le signe de f' sur $\mathbb{R}-\{1\}$ puis dresser le tableau de variation de la fonction f.
   On donne $f(\alpha)\simeq 4,219$.
   d. On admet que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution β sur $\mathbb{R}-\{1\}$.
   Donner un encadrement à 10^{-2} de β.
   e. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x^2$.
   Pourquoi peut-on dire que la parabole d'équation $y=x^2$ est asymptote à C_f ?

   On donne le programme python ci-contre.
   Que calcule ce programme ?
   Qu'affiche-t-il comme résultat ?

$$
\begin{array}{l}
X=2 \\
\text{while } \dfrac{1}{X-1} >= 0.001 : \\
\quad X=X+1 \\
\text{print }(X)
\end{array}
$$

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice :

1) *Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x)=2x^3-4x^2+2x-1$.*

a. *Déterminer u', la fonction dérivée de u, puis dresser le tableau de variation de la fonction u. On donne $u\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{19}{27}$. (On ne demande pas de calculer les limites en l'infini)*

La fonction u est dérivable en tant que fonction polynômiale. Pour tout réel x :

$$u'(x)=6x^2-8x+2=2\left(3x^2-4x+1\right)$$

Le signe de la dérivée $u'(x)$ est donné par l'expression : $3x^2-4x+1$.

Discriminant : $\Delta=(-4)^2-4\times3\times1=16-12=4=2^2$: $\Delta>0$ donc deux solutions :

$$x_1=\frac{-(-4)-2}{2\times3}=\frac{4-2}{2\times3}=\frac{2}{2\times3}=\frac{1}{3} \text{ et } x_2=\frac{-(-4)+2}{2\times3}=\frac{4+2}{6}=\frac{6}{6}=1$$

$a=3$ donc la parabole est « orientée vers le haut » :

pour tout $x\in\left]\frac{1}{3};1\right[$, $u'(x)<0$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
u		$\nearrow$	$-\frac{19}{27}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

$u\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{19}{27}$ et $u(1)=-1$

b. *Démontrer que l'équation $u(x)=0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et que $1<\alpha<2$.*

Pour tout réel $x\in\left]-\infty;1\right]$: $u(x)\leq-\frac{19}{27}$.

La fonction est strictement croissante sur $\left[1;+\infty\right[$ et continue en tant que fonction polynômiale

$u(1)=-1$ et $u(2)=3$.

D'après le corollaire du TVI, l'équation $u(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in[1;2]$.

c. *Déterminer un encadrement à 10^{-4} de α.*

$\alpha\in\left]1,5651;1,5652\right[$.

d. *En déduire le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.*

Pour tout $x\in\left]-\infty;\alpha\right]$: $u(x)\leq0$

Pour tout $x\in\left[\alpha;+\infty\right[$: $u(x)\geq0$

2) *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par : $f(x)=x^2+\frac{1}{x-1}$.*

a. *Déterminer les limites de f en $+\infty$, $-\infty$ et 1.*

On pose $\mathrm{X}=x-1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}=\lim\limits_{\mathrm{X}\to+\infty}\frac{1}{\mathrm{X}}=0^+$ donc par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

De même : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to1} x^2 = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \dfrac{1}{x-1} = \lim\limits_{\substack{X\to0\\X>0}} \dfrac{1}{X} = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} \dfrac{1}{x-1} = \lim\limits_{\substack{X\to0\\X<0}} \dfrac{1}{X} = -\infty$

Donc par somme : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = -\infty$

b. *Déterminer f' la fonction dérivée de f et montrer que $f'(x) = \dfrac{u(x)}{(x-1)^2}$.*

La fonction f est dérivable en tant que somme de fonction polynômiale et d'inverse d'une fonction polynômiale définie sur son ensemble de définition.

$$f'(x) = 2x + \frac{-1}{(x-1)^2} = 2x \times \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2} + \frac{-1}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2x\left(x^2 - 2x + 1\right) - 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{(x-1)^2} = \frac{u(x)}{(x-1)^2}$$

c. *Déterminer le signe de f' sur $\mathbb{R} - \{1\}$ puis dresser le tableau de variation de la fonction f.*

On donne $f(\alpha) \simeq 4,219$.

Pour tout réel $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $(x-1)^2 > 0$.

D'après la première partie :

Pour tout $x \in]-\infty;\alpha]$: $u(x) \le 0$ et $f'(x) \le 0$

Pour tout $x \in [\alpha;+\infty[$: $u(x) \ge 0$ et $f'(x) \ge 0$.

x	$-\infty$		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$ ↘		$-\infty$ || $+\infty$	↘	$4,219$	↗	$+\infty$

d. *On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution β sur $\mathbb{R} - \{1\}$.*

Donner un encadrement à 10^{-2} de β.

$-0,76 < \beta < -0,75$

e. *Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x^2$.*

Pourquoi peut-on dire que la parabole d'équation $y = x^2$ est asymptote à C_f ?

On donne le programme python ci-contre.
Que calcule ce programme ?
Qu'affiche-t-il comme résultat ?

```
X = 2
while 1/(X - 1) >= 0.001 :
    X = X + 1
print(X)
```

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x^2 = \dfrac{1}{x-1}$

On pose $X = x - 1$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x-1} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{X} = 0^+$, ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x^2 = 0$

En + l'infini, la courbe C_f se rapproche de plus en plus de la courbe représentant la fonction carré. On dit que C_f admet une branche asymptotique parabolique.

Ce programme indique à partir de quelle abscisse entière l'écart entre C_f et la fonction carré devient inférieur à 0,001.

La résolution peut être obtenue ainsi :

$$\frac{1}{X-1} < 0,001 \iff X-1 > \frac{1}{0,001} \iff X > 1000+1 \iff X > 1001$$

→ce programme affiche la valeur 1002.