RAPPEL : pour tous réels a et b strictement positifs, on a les égalités :

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$ $\qquad \ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$ $\qquad \ln \dfrac{1}{a} = -\ln a$ $\qquad \ln\left(a^n\right) = n \ln a$

EXERCICE 1A.1

1. Décomposer les expressions comme dans l'exemple **a.** :

a. $\ln 8x = \ln 8 + \ln x$

b. $\ln \dfrac{5}{x} =$

c. $\ln x^2 =$

d. $\ln \dfrac{3x}{5} =$

e. $\ln \dfrac{x^3}{6} =$

f. $\ln \dfrac{(x+3)^2}{x} =$

g. $\ln \dfrac{1}{2x^3} =$

h. $\ln \dfrac{(x+3)(x+4)}{x-5} =$

2. Recomposer les expressions comme dans l'exemple **a.** :

a. $\ln x + \ln 4 = \ln 4x$

b. $\ln 5 + \ln(2x) =$

c. $\ln 3 - \ln x =$

d. $4 \ln x =$

e. $\ln 7 - 2\ln x =$

f. $2\ln y - 4\ln x =$

g. $\ln(2-x) - \ln(3+2x) + \ln(4+x) =$

h. $1 - \ln\left(5 - x^2\right) =$

i. $9 + \ln x =$

j. $\ln(x) - 8 =$

EXERCICE 1A.2

a. Décomposer les nombres suivants sous la forme $2^n \times 3^p$ où n et p sont des entiers naturels :

12   24   96   128   243   192   108

b. Exprimer en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$ les nombres suivants :

$\ln 12 \qquad \ln 24 \qquad \ln 96 \qquad \ln \dfrac{128}{243} \qquad \ln \dfrac{192}{108}$

c. Exprimer en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$ les nombres suivants :

$\ln 15 \qquad \ln 60 \qquad \ln \dfrac{1}{90} \qquad \ln \dfrac{75}{12} \qquad \ln \dfrac{135}{162}$

EXERCICE 1A.3

Simplifier les écritures suivantes :

a) $\ln(8) + \ln(3) - \ln(12)$

b) $\dfrac{\ln(16)}{\ln(4)} - \ln(1)$

c) $5\ln(3) - 3\ln(9) + 2\ln(27)$

d) $\ln\left(5x^2\right) - \ln(5)$ avec $x > 0$

e) $\dfrac{e^{3+\ln 8}}{e^{2+\ln 4}}$

f) $\dfrac{e^{\ln 8}}{e^{3\ln 2}}$ $\quad e^{\ln(x+1)-\ln x}$

g) $\ln\left(e^{\frac{1}{x}}\right) + e^{-\ln x}$

h) $\ln\left(2+\sqrt{3}\right) + \ln\left(2-\sqrt{3}\right)$

EXERCICE 1A.4

Montrer que pour tout réel x, $\ln\left(x^2-1\right) - \ln\left(x^2+2x+1\right) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.

EXERCICE 1A.5

Que vaut : $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) + \ln\left(\dfrac{2}{3}\right) + \ln\left(\dfrac{3}{4}\right) + \ldots + \ln\left(\dfrac{49}{50}\right)$?

EXERCICE 1A.1

1. *Décomposer les expressions comme dans l'exemple **a.** :*

a. $\ln 8x =$ **$\ln 8 + \ln x$**

b. $\ln \frac{5}{x} = \ln 5 - \ln x$

c. $\ln x^2 = 2\ln x$

d. $\ln \frac{3x}{5} = \ln 3x - \ln 5$

e. $\ln \frac{x^3}{6} = \ln x^3 - \ln 6 = 3\ln x - \ln 6$

f. $\ln \frac{(x+3)^2}{x} = \ln (x+3)^2 - \ln x = 2\ln(x+3) - \ln x$

g. $\ln \frac{1}{2x^3} = -\ln\left(2x^3\right) = -\ln 2 - 3\ln x$

h. $\ln \frac{(x+3)(x+4)}{x-5} = \ln(x+3) + \ln(x+4) - \ln(x-5)$

2. *Recomposer les expressions comme dans l'exemple **a.** :*

a. $\ln x + \ln 4 =$ **$\ln 4x$**

b. $\ln 5 + \ln(2x) = \ln(5\times 2x) = \ln(10x)$

c. $\ln 3 - \ln x = \ln \frac{3}{x}$

d. $4\ln x = \ln x^4$

e. $\ln 7 - 2\ln x = \ln 7 - \ln\left(x^2\right) = \ln\left(\frac{7}{x^2}\right)$

f. $2\ln y - 4\ln x = \ln y^2 - \ln x^4 = \ln \frac{y^2}{x^4}$

g. $\ln(2-x) - \ln(3+2x) + \ln(4+x) = \ln \frac{(2-x)(4+x)}{3+2x}$

h. $1 - \ln\left(5-x^2\right) = \ln e - \ln\left(5-x^2\right) = \ln \frac{e}{5-x^2}$

i. $9 + \ln x = \ln e^9 + \ln x = \ln\left(x\times e^9\right)$

j. $\ln(x) - 8 = \ln x - \ln e^8 = \ln \frac{x}{e^8}$

EXERCICE 1A.2

a. *Décomposer les nombres suivants sous la forme $2^n \times 3^p$ où n et p sont des entiers naturels :*

$12 = 4\times 3 = 2^2\times 3$ $\quad 24 = 8\times 3 = 2^3\times 3$ $\quad 96 = 32\times 3 = 2^5\times 3$ $\quad 128 = 2^7$

$243 = 3^5$ $\quad 192 = 64\times 9 = 2^6\times 3$ $\quad 108 = 4\times 27 = 2^2\times 3^3$

b. *Exprimer en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$ les nombres suivants :*

ln 12 $\quad$ ln 24 $\quad$ ln 96 $\quad$ $\ln \frac{128}{243}$ $\quad$ $\ln \frac{192}{108}$

$\ln 12 = \ln\left(2^2\times 3\right) = 2\ln 2 + \ln 3$ $\quad \ln 24 = \ln\left(2^3\times 3\right) = 3\ln 2 + \ln 3$ $\quad \ln 96 = \ln\left(2^5\times 3\right) = 5\ln 2 + \ln 3$

$\ln \frac{128}{243} = \ln \frac{2^7}{3^5} = 7\ln 2 - 5\ln 3$ $\quad \ln \frac{192}{108} = \ln \frac{2^6\times 3}{2^2\times 3^3} = \ln \frac{2^4}{3^2} = \ln 2^4 - \ln 3^2 = 4\ln 2 - 2\ln 3$

c. *Exprimer en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$ les nombres suivants :*

$\ln 15 = \ln(3\times 5) = \ln 3 + \ln 5$ $\quad \ln 60 = \ln\left(2^2\times 3\times 5\right) = 2\ln 2 + \ln 3 + \ln 5$

$\ln \frac{1}{90} = \ln 1 - \ln 90 = -\ln\left(2\times 3^2\times 5\right) = -\ln 2 - 2\ln 3 - \ln 5$ $\quad \ln \frac{75}{12} = \ln \frac{3\times 5^2}{2^2\times 3} = \ln \frac{5^2}{2^2} = 2\ln 5 - 2\ln 2$

$\ln \frac{135}{162} = \ln \frac{3^3\times 5}{2\times 3^4} = \ln \frac{5}{2\times 3} = \ln 5 - \ln 2 - \ln 3$

EXERCICE 1A.3

Simplifier les écritures suivantes :

$$\ln(8) + \ln(3) - \ln(12) = \ln\left(2^3\right) + \ln(3) - \ln\left(2^2\times 3\right) = 3\ln(2) + \ln(3) - 2\ln(2) - \ln(3) = \ln(2)$$

$$\frac{\ln(16)}{\ln(4)} - \ln(1) = \frac{\ln\left(2^4\right)}{\ln\left(2^2\right)} - 0 = \frac{4\ln 2}{2\ln 2} = 2$$

$$5\ln(3)-3\ln(9)+2\ln(27)=5\ln(3)-3\ln\left(3^2\right)+2\ln\left(3^3\right)=5\ln(3)-6\ln(3)+6\ln(3)=5\ln(3)$$

Si $x>0$: $\ln\left(5x^2\right)-\ln(5)=\ln(5)+\ln\left(x^2\right)-\ln(5)=2\ln x$

$$\frac{e^{3+\ln 8}}{e^{2+\ln 4}}=\frac{e^3\times e^{\ln 8}}{e^2\times e^{\ln 4}}=\frac{8e^3}{4e^2}=2e^{3-2}=2e \qquad \frac{e^{\ln 8}}{e^{3\ln 2}}=\frac{8}{e^{\ln 2^3}}=\frac{8}{e^{\ln 8}}=\frac{8}{8}=1$$

$$e^{\ln(x+1)-\ln x}=\frac{e^{\ln(x+1)}}{e^{\ln x}}=\frac{x+1}{x} \qquad \ln\left(e^{\frac{1}{x}}\right)+e^{-\ln x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{e^{\ln x}}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{2}{x}$$

$$\ln\left(2+\sqrt{3}\right)+\ln\left(2-\sqrt{3}\right)=\ln\left[\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)\right]=\ln\left[2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2\right]=\ln(4-3)=0$$

EXERCICE 1A.4

Montrer que pour tout réel x, $\ln\left(x^2-1\right)-\ln\left(x^2+2x+1\right)=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

$$\ln\left(x^2-1\right)-\ln\left(x^2+2x+1\right)=\ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}\right)=\ln\left(\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)^2}\right)=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

EXERCICE 1A.5

Que vaut : $\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln\left(\frac{2}{3}\right)+\ln\left(\frac{3}{4}\right)+...+\ln\left(\frac{49}{50}\right)$?

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln\left(\frac{2}{3}\right)+\ln\left(\frac{3}{4}\right)+...+\ln\left(\frac{49}{50}\right)=\ln 1-\ln 2+\ln 2-\ln 3+\ln 3-\ln 4+...+\ln 49-\ln 50$$

$$=\ln 1-\ln 50=-\ln 50$$