EQUATIONS LOGARITHMIQUES

EXERCICE 3A.1

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations (on rappelle que ln n'est défini que sur $]0;+\infty[$) :

a. $\ln x = \ln 10$ avec $x \in]0;+\infty[$

b. $\ln(3+x) = \ln(2-x)$ avec $x \in]-3;2[$

c. $\ln 5x = 1$ avec $x \in]0;+\infty[$

d. $\ln(2x+6) = 1$ avec $x \in]-3;+\infty[$

e. $\ln(4x-2) = 0$ avec $x \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

f. $\ln\left(1-x^2\right) = \ln(1-x)$ avec $x \in]-1;1[$

2. Ecrire les équations suivantes sous la forme « ln A = ln B » puis les résoudre dans $\mathbb{R}$:

a. $\ln x + \ln 4 = \ln 6 - \ln x$ avec $x \in]0;+\infty[$

b. $2\ln(x+3) = \ln 36$ avec $x \in]-3;+\infty[$

c. $\ln x + \ln(x-1) = \ln\left(x^2-4\right)$ avec $x \in]2;+\infty[$

d. $2\ln(x-3) = \ln(5-x)$ avec $x \in]3;5[$

e. $\ln(x-6) = \frac{1}{2}\ln 25$ avec $x \in]6;+\infty[$

f. $2\ln x - \ln 9 = 1$ avec $x \in]0;+\infty[$

Exercice 3A.2 :

Résoudre les équations suivantes :

a) $\ln(3x+27) = 0$

b) $1 = \ln(2-5x)$

c) $\ln(6x+18) = 4$

Exercice 3B.3 :

Résoudre les équations suivantes :

a) $\ln(2x+8) = \ln(5-7x)$

b) $\ln(x-2) = \ln(-1-x)$

c) $\ln\left(\frac{x+8}{5-x}\right) = 4$

d) $\ln(x-3) - \ln(5+x) = 0$

Exercice 3B.4 : Résoudre les équations suivantes :

a) $\ln(x-5) + \ln(x+4) = \ln 12$

b) $\ln\left(x^2-4x\right) = \ln(5x)$

Exercice 3B.5 : Résoudre les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} \ln(xy+y-x-1) = 1 \\ xy+x+y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \ln x + \ln y = 1 \\ x+y = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-y = \frac{1}{2} \\ \ln x + \ln y = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5\ln x + 2\ln y = 26 \\ 2\ln x - 3\ln y = -1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \ln(xy) = 4 \\ (\ln x)(\ln y) = -12 \end{cases}$

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

EXERCICE 3A.1

1. *Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations (on rappelle que ln n'est défini que sur $]0;+\infty[$) :*

a. $\ln x = \ln 10$ avec $x \in]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow x = 10 \rightarrow S = \{10\}$

b. $\ln(3+x) = \ln(2-x)$ avec $x \in]-3;2[$

$\Leftrightarrow 3+x = 2-x \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2} \rightarrow S = \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

c. $\ln 5x = 1$ avec $x \in]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow \ln 5x = \ln e \Leftrightarrow 5x = e \Leftrightarrow x = \dfrac{e}{5} \rightarrow S = \left\{\dfrac{e}{5}\right\}$

d. $\ln(2x+6) = 1$ avec $x \in]-3;+\infty[$

$\Leftrightarrow \ln(2x+6) = \ln e \Leftrightarrow 2x+6 = e \Leftrightarrow x = \dfrac{e-6}{2}$

$\dfrac{e-6}{2} \in]-3;+\infty[$ donc $S = \left\{\dfrac{e-6}{2}\right\}$

e. $\ln(4x-2) = 0$ avec $x \in \left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

$\Leftrightarrow \ln(4x-2) = \ln 1 \Leftrightarrow 4x-2 = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{4}$

$\dfrac{3}{4} \in \left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ donc $S = \left\{\dfrac{3}{4}\right\}$

f. $\ln\left(1-x^2\right) = \ln(1-x)$ avec $x \in]-1;1[$

$\Leftrightarrow 1-x^2 = 1-x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0$

2 solutions 0 et 1 mais $1 \notin]-1;1[$ donc $S = \{0\}$

2. *Ecrire les équations suivantes sous la forme « ln A = ln B » puis les résoudre dans $\mathbb{R}$:*

a. $\ln x + \ln 4 = \ln 6 - \ln x$ avec $x \in]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow 2\ln x = \ln 6 - \ln 4 \Leftrightarrow \ln x^2 = \ln\dfrac{6}{4} \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{3}{2}$

2 sol $-\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ et $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ mais $-\sqrt{\dfrac{3}{2}} \notin]0;+\infty[\rightarrow S = \left\{\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right\}$

$2\ln(x+3) = \ln 36$ avec $x \in]-3;+\infty[$

$\Leftrightarrow \ln(x+3)^2 = \ln 36 \Leftrightarrow (x+3)^2 = 36$

$\Leftrightarrow (x+3)^2 - 6^2 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+9) = 0$

2 sol -9 et 3 mais $-9 \notin]-3;+\infty[$ donc $S = \{3\}$

c. $\ln x + \ln(x-1) = \ln\left(x^2-4\right)$ avec $x \in]2;+\infty[$

$\Leftrightarrow \ln[x(x-1)] = \ln\left(x^2-4\right) \Leftrightarrow x^2 - x = x^2 - 4$

$\Leftrightarrow -x = -4 \Leftrightarrow x = 4$ avec $4 \in]2;+\infty[\rightarrow S = \{4\}$

d. $2\ln(x-3) = \ln(5-x)$ avec $x \in]3;5[$

$\Leftrightarrow \ln(x-3)^2 = \ln(5-x) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 5 - x$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-1) = 0$

2 sol : 1 et 4 mais $1 \notin]3;5[$ donc $S = \{4\}$

e. $\ln(x-6) = \dfrac{1}{2}\ln 25$ avec $x \in]6;+\infty[$

$\Leftrightarrow \ln(x-6) = \ln\sqrt{25} \Leftrightarrow \ln(x-6) = \ln 5$

$\Leftrightarrow x-6 = 5 \Leftrightarrow x = 11$

$11 \in]6;+\infty[\rightarrow S = \{11\}$

f. $2\ln x - \ln 9 = 1$ avec $x \in]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow \ln x^2 - \ln 9 = 1 \Leftrightarrow \ln\dfrac{x^2}{9} = \ln e \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{9} = e$

$\Leftrightarrow x^2 = 9e \Leftrightarrow \left(x+3\sqrt{e}\right)\left(x-3\sqrt{e}\right) = 0$

Or $-3\sqrt{e} \notin]0;+\infty[\rightarrow S = \left\{3\sqrt{e}\right\}$

Exercice 3A.2 : *Résoudre les équations suivantes :*

a) $\ln(3x+27) = 0$ | **b)** $1 = \ln(2-5x)$ | **c)** $\ln(6x+18) = 4$

1) Domaine d'existence des solutions :

a) $3x+27 > 0 \Leftrightarrow x > -9$

$D_E =]-9;+\infty[$

b) $2-5x > 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{2}{5}$

$D_E = \left]-\infty;\dfrac{2}{5}\right[$

c) $6x+18 > 0 \Leftrightarrow x > -3$

$D_E =]-3;+\infty[$

2) Résolution :

$\ln(3x+27)=0$	$1=\ln(2-5x)$	$\ln(6x+18)=4$
$\Leftrightarrow \ln(3x+27)=\ln 1$	$\Leftrightarrow \ln e=\ln(2-5x)$	$\Leftrightarrow e^{\ln(6x+18)}=e^4$
$\Leftrightarrow 3x+27=1$	$\Leftrightarrow e=2-5x$	$\Leftrightarrow 6x+18=e^4$
$\Leftrightarrow x=\dfrac{-26}{3}$	$\Leftrightarrow x=\dfrac{2-e}{5}$	$\Leftrightarrow x=\dfrac{e^4-18}{6}$

3) Vérification :

$\dfrac{-26}{3}\in\left]-9;+\infty\right[$	$\dfrac{2-e}{5}\in\left]-\infty;\dfrac{2}{5}\right[$	$\dfrac{e^4-18}{6}\in\left]-3;+\infty\right[$

4) Solution :

$S=\left\{\dfrac{-26}{3}\right\}$	$S=\left\{\dfrac{2-e}{5}\right\}$	$S=\left\{\dfrac{e^4-18}{6}\right\}$

Exercice 3B.3 : *Résoudre les équations suivantes :*

a) $\ln(2x+8)=\ln(5-7x)$

1) Domaine d'existence des solutions :

Il faut que $2x+8>0 \Leftrightarrow x>-4$ et $5-7x>0 \Leftrightarrow x<\dfrac{5}{7}$ → $D_E=\left]-4;\dfrac{5}{7}\right[$

2) Résolution :

La fonction logarithme est strictement croissante :

$$\ln(2x+8)=\ln(5-7x)$$
$$\Leftrightarrow 2x+8=5-7x$$
$$\Leftrightarrow 2x+7x=5-8$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-3}{9}=-\frac{1}{3}$$

3) Vérification : $-\dfrac{1}{3}\in\left]-4;\dfrac{5}{7}\right[$

4) Solution : $S=\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$

b) $\ln(x-2)=\ln(-1-x)$

1) Domaine d'existence des solutions :

Il faut que $x-2>0 \Leftrightarrow x>2$ et $-1-x>0 \Leftrightarrow -x>1 \Leftrightarrow x<-1$ → $D_E=\varnothing$

Cette équation n'admet pas de solution.

c) $\ln\left(\dfrac{x+8}{5-x}\right)=4$

1) Domaine d'existence des solutions :

Il faut que $5-x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 5$ et $\dfrac{x+8}{5-x}>0$: $x+8>0 \Leftrightarrow x>-8$ et $5-x>0 \Leftrightarrow x<5$:

→un tableau de signes donne : $D_E=\left]-8;5\right[$

2) Résolution :

La fonction exponentielle est strictement croissante :

$$\ln\left(\frac{x+8}{5-x}\right)=4$$

$\Leftrightarrow \quad e^{\ln\left(\frac{x+8}{5-x}\right)} = e^4$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{x+8}{5-x} = e^4$

$\Leftrightarrow \quad x+8 = e^4(5-x)$

$\Leftrightarrow \quad x+8 = 5e^4 - e^4 x$

$\Leftrightarrow \quad x + e^4 x = 5e^4 - 8$

$\Leftrightarrow \quad x = \dfrac{5e^4-8}{1+e^4}$

3) Vérification : $\dfrac{5e^4-8}{1+e^4} \in \left]-8;5\right[$

4) Solution : $S = \left\{\dfrac{5e^4-8}{1+e^4}\right\}$

d) $\ln(x-3) - \ln(5+x) = 0$

1) Domaine d'existence des solutions :

Il faut que $x-3>0 \Leftrightarrow x>3$ et $5+x>0 \Leftrightarrow x>-5$ $\rightarrow D_E = \left]3;+\infty\right[$

2) Résolution :

La fonction logarithme est strictement croissante :

$\ln(x-3) - \ln(5+x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \ln(x-3) = \ln(5+x)$

$\Leftrightarrow \quad x-3 = 5+x$

$\Leftrightarrow \quad -3 = 5$

Ce qui est impossible, donc cette équation n'admet pas de solution.

Exercice 3B.4 : *Résoudre les équations suivantes :*

a) $\ln(x-5) + \ln(x+4) = \ln 12$

1) Domaine d'existence des solutions :

Il faut que $x-5>0 \Leftrightarrow x>5$ et $x+4>0 \Leftrightarrow x>-4$ $\rightarrow D_E = \left]5;+\infty\right[$

2) Résolution :

La fonction logarithme est strictement croissante :

$\ln(x-5) + \ln(x+4) = \ln 12$

$\Leftrightarrow \quad \ln\left[(x-5)(x+4)\right] = \ln 12$

$\Leftrightarrow \quad (x-5)(x+4) = 12$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + 4x - 5x - 20 = 12$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - x - 32 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4\times 1 \times (-32) = 129$ $\rightarrow x_1 = \dfrac{1-\sqrt{129}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{129}}{2}$

3) Vérification : $\dfrac{1-\sqrt{129}}{2} \notin \left]5;+\infty\right[$ et $\dfrac{1+\sqrt{129}}{2} \in \left]5;+\infty\right[$

4) Solution : $S = \left\{\dfrac{1+\sqrt{129}}{2}\right\}$

b) $\ln\left(x^2-4x\right)=\ln(5x)$

1) Domaine d'existence des solutions :

Il faut que $5x>0$ et $x^2-4x>0 \Leftrightarrow x(x-4)>0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty;0\right[\cup\left]4;+\infty\right[\quad \rightarrow D_E=\left]4;+\infty\right[$

2) Résolution :

La fonction logarithme est strictement croissante :

$$\ln\left(x^2-4x\right)=\ln(5x)$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x=5x$$
$$\Leftrightarrow x^2-9x=0$$
$$\Leftrightarrow x(x-9)=0$$

Soit $x=0$, soit $x=9$

3) Vérification : $0\notin\left]4;+\infty\right[$ et $9\in\left]4;+\infty\right[$

4) Solution : $S=\{9\}$

Exercice 3B.5 : *Résoudre les systèmes suivants :*

a) $\begin{cases}\ln(xy+y-x-1)=1\\ xy+x+y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}xy+y-x-1=e^1\\ xy+x+y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2-x-x-1=e\\ xy+y=2-x\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-2x=e-1\\ xy+y=2-x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{1-e}{2}\\ \dfrac{1-e}{2}\times y+y=2-\dfrac{1-e}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{1-e}{2}\\ \dfrac{1-e}{2}\times y+\dfrac{2y}{2}=\dfrac{4}{2}-\dfrac{1-e}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{1-e}{2}\\ \dfrac{3-e}{2}\times y=\dfrac{3+e}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{1-e}{2}\\ y=\dfrac{3+e}{2}\times\dfrac{2}{3-e}=\dfrac{3+e}{3-e}\end{cases} \rightarrow S=\left\{\left(\dfrac{1-e}{2};\dfrac{3+e}{3-e}\right)\right\}$$

b) $\begin{cases}\ln x+\ln y=1\\ x+y=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\ln(xy)=1\\ x+y=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}xy=e^1\\ y=4-x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x(4-x)=e\\ y=4-x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-4x+e=0\\ y=4-x\end{cases}$

$\Delta=(-4)^2-4\times1\times e=16-4e$: il y a deux solutions :

$$x_1=\frac{4-\sqrt{16-4e}}{2}=2-\sqrt{4-e} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{4+\sqrt{16-4e}}{2}=2+\sqrt{4-e}$$

On obtient :

$$y_1=4-x_1=4-\left(2-\sqrt{4-e}\right)=2+\sqrt{4-e} \quad \text{et} \quad y_2=4-x_2=4-\left(2+\sqrt{4-e}\right)=2-\sqrt{4-e}$$

Les solutions sont :

$$S=\left\{\left(2-\sqrt{4-e};2+\sqrt{4-e}\right);\left(2+\sqrt{4-e};2-\sqrt{4-e}\right)\right\}$$

c) $\begin{cases}x-y=\dfrac{1}{2}\\ \ln x+\ln y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-y=\dfrac{1}{2}\\ \ln(xy)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{1}{2}+y\\ xy=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{1}{2}+y\\ \left(\dfrac{1}{2}+y\right)y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{1}{2}+y\\ y^2+\dfrac{1}{2}y-1=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{1}{2}+y\\ 2y^2+y-2=0\end{cases} \quad : \ \Delta=1^2-4\times2\times(-2)=17 \ \text{: il y a deux solutions :}$$

$$y_1=\frac{-1-\sqrt{17}}{2\times 2}=\frac{-1-\sqrt{17}}{4} \quad \text{et} \quad y_2=\frac{-1+\sqrt{17}}{2\times 2}=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$$

On obtient :

$$x_1=\frac{1}{2}+y_1=\frac{1}{2}+\frac{-1-\sqrt{17}}{4}=\frac{1-\sqrt{17}}{4} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{1}{2}+y_2=\frac{1}{2}+\frac{-1\sqrt{17}}{4}=\frac{1+\sqrt{17}}{4}$$

Les solutions sont :

$$S=\left\{\left(\frac{1-\sqrt{17}}{4};\frac{-1-\sqrt{17}}{4}\right);\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4};\frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right)\right\}$$

d) $$\begin{cases}5\ln x+2\ln y=26\\ 2\ln x-3\ln y=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\ln x^5+\ln y^2=26\\ \ln x^2-\ln y^3=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\ln\left(x^5y^2\right)=26\\ \ln\dfrac{x^2}{y^3}=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\ln\left(x^5y^2\right)=26\\ \ln\dfrac{y^3}{x^2}=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^5y^2=e^{26}\\ \dfrac{y^3}{x^2}=e\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(x^5y^2\right)^3=\left(e^{26}\right)^3\\ y^3=ex^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^{15}y^6=e^{78}\\ y^3=ex^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^{15}\left(y^3\right)^2=e^{78}\\ y^3=ex^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^{15}\left(ex^2\right)^2=e^{78}\\ y^3=ex^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^{15}\times e^2x^4=e^{78}\\ y^3=ex^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^{19}=\dfrac{e^{78}}{e^2}\\ y^3=ex^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^{19}=e^{76}\\ y^3=ex^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(x^{19}\right)^{\frac{1}{19}}=\left(e^{76}\right)^{\frac{1}{19}}\\ y^3=ex^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=e^4\\ y^3=e\times\left(e^4\right)^2=e^9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=e^4\\ \left(y^3\right)^{\frac{1}{3}}=\left(e^9\right)^{\frac{1}{3}}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=e^4\\ y=e^3\end{cases}$$

La solution est :

$$S=\left\{\left(e^4;e^3\right)\right\}$$

e) $$\begin{cases}\ln(xy)=4\\ (\ln x)(\ln y)=-12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}xy=e^4\\ (\ln x)(\ln y)=-12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\dfrac{e^4}{x}\\ (\ln x)\left(\ln\dfrac{e^4}{x}\right)=-12\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=\dfrac{e^4}{x}\\ (\ln x)\left(\ln e^4-\ln x\right)=-12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\dfrac{e^4}{x}\\ (\ln x)(4-\ln x)=-12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\dfrac{e^4}{x}\\ (\ln x)^2-4(\ln x)-12=0\end{cases}$$

On pose : $X=\ln x$, l'équation devient :

$$X^2-4X-12=0 \Leftrightarrow (X-6)(X+2)=0$$

On obtient deux solutions : 6 et -2.

Or : $X=\ln x \Leftrightarrow x=e^X$. Ainsi :

$$x_1=e^6 \quad \text{et} \quad x_2=e^{-2}$$

On en déduit :

$$y_1=\frac{e^4}{x_1}=\frac{e^4}{e^6}=e^{-2} \quad \text{et} \quad y_2=\frac{e^4}{x_2}=\frac{e^4}{e^{-2}}=e^6$$

Les solutions sont :

$$S=\left\{\left(e^6;e^{-2}\right);\left(e^{-2};e^6\right)\right\}$$