Inéquations logarithmiques

EXERCICE 3B.1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :

a. $\ln(x-1)\geq 0$ pour $x\in\left]1;+\infty\right[$

b. $\ln(x-1)<0$ pour $x\in\left]1;+\infty\right[$

c. $\ln(x+2)\leq\ln 5$ pour $x\in\left]-2;+\infty\right[$

d. $\ln(2x+1)\geq 1$ pour $x\in\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

e. $\ln(x+1)\leq 1$ pour $x\in\left]-1;+\infty\right[$

Exercice 3B.2 :

Résoudre les inéquations suivantes :

a) $\ln(3x+9)\leq 1$

b) $\ln(20-4x)\leq 0$

c) $2-5\ln x\geq 9$

Exercice 3B.3 :

Résoudre les inéquations suivantes :

a) $\ln(x-3)\leq\ln(5-x)$

b) $\ln(x-5)\geq\ln(-x-1)$

c) $\ln\left(x^2+3x+2\right)\geq\ln(-5x-13)$

d) $\ln\left(2-\frac{5}{x}\right)\leq\ln 8$

e) $\ln\left(x^2-9\right)<\ln(4-x)$

f) $2\ln(x+1)\leq\ln(x-2)+\ln(5-x)$

g) $\ln\left(\frac{x+4}{7-x}\right)\geq\ln(2-x)$

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

EXERCICE 3B.1 *Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :*

a. $\ln(x-1)\geq 0$ pour $x\in\,]1;+\infty[$

$$\ln(x-1)\geq 0 \Leftrightarrow \ln(x-1)\geq \ln 1$$
$$\Leftrightarrow x-1\geq 1$$
$$\Leftrightarrow x\geq 2 \quad \text{avec } x\in\,]1;+\infty[$$

$S=[2;+\infty[$

b. $\ln(x-1)<0$ pour $x\in\,]1;+\infty[$

$$\ln(x-1)<0 \Leftrightarrow \ln(x-1)<\ln 1$$
$$\Leftrightarrow x-1<1$$
$$\Leftrightarrow x<2$$

or $x\in\,]1;+\infty[$ donc : $S=\,]1;2[$

c. $\ln(x+2)\leq \ln 5$ pour $x\in\,]-2;+\infty[$

$$\ln(x+2)\leq \ln 5 \Leftrightarrow x+2\leq 5$$
$$\Leftrightarrow x\leq 3$$

or $x\in\,]-2;+\infty[$ donc : $S=\,]-2;3]$

d. $\ln(2x+1)\geq 1$ pour $x\in\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

$$\ln(2x+1)\geq 1 \Leftrightarrow \ln(2x+1)\geq \ln e$$
$$\Leftrightarrow 2x+1\geq e$$
$$\Leftrightarrow x\geq \frac{e-1}{2}$$

or $x\in\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ donc : $S=\left[\dfrac{e-1}{2};+\infty\right[$

e. $\ln(x+1)\leq 1$ pour $x\in\,]-1;+\infty[$

$$\ln(x+1)\leq 1 \Leftrightarrow \ln(x+1)\leq \ln e$$
$$\Leftrightarrow x+1\leq e$$
$$\Leftrightarrow x\leq e-1$$

or $x\in\,]-1;+\infty[$ donc : $S=\,]-1;e-1]$

Exercice 3B.2 : *Résoudre les inéquations suivantes :*

a) $\ln(3x+9)\leq 1$

1) Domaine d'existence des solutions :

Il faut que $3x+9>0 \Leftrightarrow x>-3 \rightarrow D_E=\,]-3;+\infty[$

2) Résolution :

La fonction exponentielle est strictement croissante :

$$\ln(3x+9)\leq 1$$
$$\Leftrightarrow e^{\ln(3x+9)}\leq e^1$$
$$\Leftrightarrow 3x+9\leq e$$
$$\Leftrightarrow x\leq \frac{e-9}{3}$$
$$D_R=\left]-\infty;\frac{e-9}{3}\right[$$

3) Solution : $S=D_E\cap D_R=\left]-3;\dfrac{e-9}{3}\right[$

b) $\ln(20-4x)\leq 0$

1) Domaine d'existence des solutions :

Il faut que $20-4x>0 \Leftrightarrow -4x>-20 \Leftrightarrow x<5 \rightarrow D_E=\,]-\infty;5[$

2) Résolution :

La fonction exponentielle est strictement croissante :

$$\ln(20-4x)\leq 0$$
$$\Leftrightarrow e^{\ln(20-4x)}\geq e^0$$

$\Leftrightarrow \quad 20-4x \geq 1$

$\Leftrightarrow \quad -4x \geq -19$

$\Leftrightarrow \quad x \leq \dfrac{19}{4}$

$D_{\mathrm{R}} = \left]-\infty;\dfrac{19}{4}\right[$

3) Solution : $S = D_{\mathrm{E}} \cap D_{\mathrm{R}} = \left]-\infty;\dfrac{19}{4}\right[$

c) $2-5\ln x \geq 9$

1) Domaine d'existence des solutions :

Il faut que $x>0$ → $D_{\mathrm{E}} =]0;+\infty[$

2) Résolution :

La fonction exponentielle est strictement croissante :

$2-5\ln x \geq 9$

$\Leftrightarrow \quad -5\ln x > 7$

$\Leftrightarrow \quad \ln x < -\dfrac{7}{5}$

$\Leftrightarrow \quad e^{\ln(x)} < e^{-\frac{7}{5}}$

$\Leftrightarrow \quad x < e^{-\frac{7}{5}}$

$D_{\mathrm{R}} = \left]-\infty;e^{-\frac{7}{5}}\right[$

3) Solution : $S = D_{\mathrm{E}} \cap D_{\mathrm{R}} = \left]0;e^{-\frac{7}{5}}\right[$

Exercice 3B.3 : *Résoudre les inéquations suivantes :*

a) $\ln(x-3) \leq \ln(5-x)$

1) Domaine d'existence des solutions

Il faut que $x-3>0 \Leftrightarrow x>3$ et $5-x>0 \Leftrightarrow x<5$ → $D_{\mathrm{E}} =]3;5[$

2) Domaine de résolution :

$\ln(x-3) \leq \ln(5-x)$

$\Leftrightarrow \quad x-3 \leq 5-x$

$\Leftrightarrow \quad 2x \leq 8$

$\Leftrightarrow \quad x \leq 4$

donc $D_R =]-\infty;4]$

3) Solution : $S = D_E \cap D_R =]3;4]$

b) $\ln(x-5) \geq \ln(-x-1)$

1) Domaine d'existence des solutions

Il faut que $x-5>0 \Leftrightarrow x>5$ et $-x-1>0 \Leftrightarrow -x>1 \Leftrightarrow x<-1$ → $D_{\mathrm{E}} = \varnothing$

Cette inéquation ne possède pas de solution.

c) $\ln\left(x^2+3x+2\right) \geq \ln(-5x-13)$

1) Domaine d'existence des solutions

Il faut que $x^2+3x+2>0$: $\Delta = 3^2-4\times1\times2 = 9-8 = 1 = 1^2$ donc deux solutions :

$$x_1=\frac{-3-1}{2}=-2 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-3+1}{2}=-1$$

$a=1$ donc la parabole est orientée vers le haut, ainsi :

$$x^2+3x+2>0 \quad \text{si} \quad x\in\left]-\infty;-2\right[\cup\left]-1;+\infty\right[$$

Il faut que $-5x-13>0 \iff -5x>13 \iff x<\frac{-13}{5}$

On en déduit : $D_E=\left]-\infty;\frac{-13}{5}\right[$.

2) Domaine de résolution :

$$\ln\left(x^2+3x+2\right)\geq\ln(-5x-13)$$

$$\iff x^2+3x+2\geq -5x-13$$

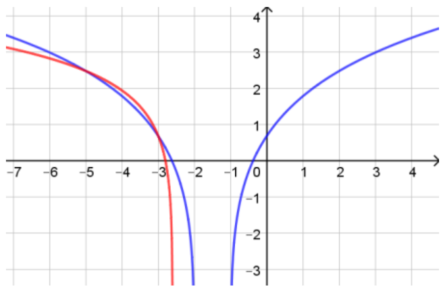
$$\iff x^2+8x+15\geq 0$$

$\Delta=8^2-4\times1\times15=64-60=4=2^2$ donc deux solutions :

$$x_1=\frac{-8-2}{2}=-5 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-8+2}{2}=-3$$

$a=1$ donc la parabole est orientée vers le haut, ainsi :

$$D_R=\left]-\infty;-5\right]\cup\left]-3\,;+\infty\right[$$



3) Solution : $S=D_E\cap D_R=\left]-\infty;-5\right]\cup\left]-3\,;\frac{-13}{5}\right[$

d) $\ln\left(2-\frac{5}{x}\right)\leq\ln 8$

1) Domaine d'existence des solutions

Il faut que $2-\frac{5}{x}>0 \iff -\frac{5}{x}>-2 \iff \frac{5}{x}<2$

→si $x<0$: l'inéquation $\frac{5}{x}<2$ est vérifiée

→si $x>0$: $\frac{5}{x}<2 \iff \frac{x}{5}>\frac{1}{2} \iff x>\frac{5}{2}$

Ainsi : $D_E=\left]-\infty;0\right[\cup\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$

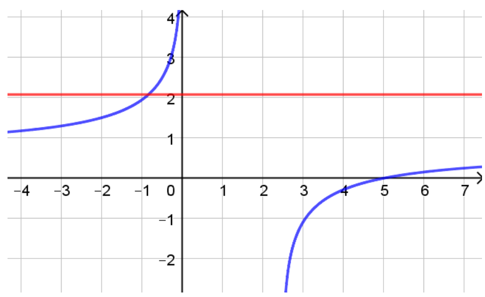
2) Domaine de résolution :

$$\ln\left(2-\frac{5}{x}\right)\leq\ln 8 \iff 2-\frac{5}{x}\leq 8 \iff -\frac{5}{x}\leq 6 \iff \frac{5}{x}\geq -6$$

Si $x>0$: l'inéquation $\frac{5}{x}\geq -6$ est toujours vraie.

Si $x>0$: $\frac{5}{x}\geq -6 \iff \frac{x}{5}\leq -\frac{1}{6} \iff x\leq -\frac{5}{6}$

donc $D_R=\left]-\infty;-\frac{5}{6}\right]\cup\left]0;+\infty\right[$



3) Solution : $S=D_E\cap D_R=\left]-\infty;-\frac{5}{6}\right]\cup\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$

e) $\ln\left(x^2-9\right)<\ln(4-x)$

1) Domaine d'existence des solutions

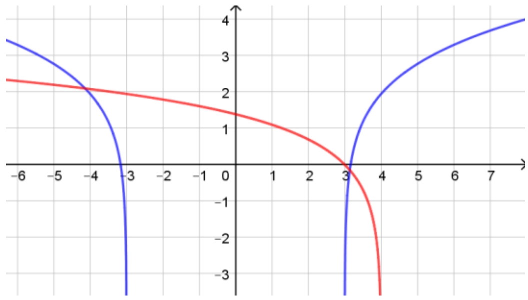
Il faut que $x^2-9>0 \Leftrightarrow x^2>9$: $x\in\left]-\infty;-3\right[\cup\left]3;+\infty\right[$

Il faut aussi $4-x>0 \Leftrightarrow -x>-4 \Leftrightarrow x<4$

On en déduit : $D_{\mathrm{E}}=\left]-\infty;-3\right[\cup\left]3;4\right[$.

2) Domaine de résolution :

$$\begin{aligned}&\ln\left(x^2-9\right)<\ln(4-x)\\ \Leftrightarrow\ & x^2-9<4-x\\ \Leftrightarrow\ & x^2+x-13<0\end{aligned}$$



$\Delta=1^2-4\times1\times(-13)=53$ donc deux solutions :

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{53}}{2} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-1+\sqrt{53}}{2}$$

$a=1$ donc la parabole est orientée vers le haut, ainsi :

$$D_R=\left]\frac{-1-\sqrt{53}}{2};\frac{-1+\sqrt{53}}{2}\right[$$

3) Solution : $S=D_E\cap D_R=\left]\frac{-1-\sqrt{53}}{2};-3\right[\cup\left]3;\frac{-1+\sqrt{53}}{2}\right[$

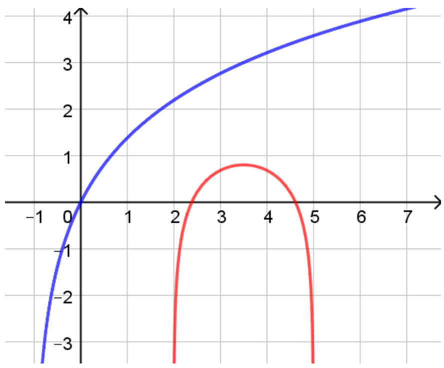
f) $2\ln(x+1)\le\ln(x-2)+\ln(5-x)$

1) Domaine d'existence des solutions

Il faut que $\begin{cases}x+1>0\\x-2>0\\5-x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>-1\\x>2\\5>x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>-1\\x>2\\x<5\end{cases} \rightarrow D_{\mathrm{E}}=\left]2;5\right[$

2) Domaine de résolution :

$$\begin{aligned}&2\ln(x+1)\le\ln(x-2)+\ln(5-x)\\ \Leftrightarrow\ & \ln\left((x+1)^2\right)\le\ln\left[(x-2)(5-x)\right]\\ \Leftrightarrow\ & (x+1)^2\le(x-2)(5-x)\\ \Leftrightarrow\ & x^2+2x+1\le x^2+3x-10\\ \Leftrightarrow\ & 2x-3x\le-10-1\\ \Leftrightarrow\ & -x\le-11\\ \Leftrightarrow\ & x\ge11\end{aligned}$$



donc $D_R=\left[11;+\infty\right[$

3) Solution : $S=D_E\cap D_R=\varnothing$

g) $\ln\left(\dfrac{x+4}{7-x}\right)\ge\ln(2-x)$

1) Domaine d'existence des solutions

Il faut que $\dfrac{x+4}{7-x}>0$: avec un tableau de signes, on obtient : $x\in\left]-4;7\right[$

Il faut aussi : $2-x>0 \Leftrightarrow -x>-2 \Leftrightarrow x<2$

→ $D_E =]-4;2[$

2) Domaine de résolution :

$$\ln\left(\frac{x+4}{7-x}\right) \geq \ln(2-x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+4}{7-x} \geq 2-x$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+4}{7-x} - \frac{(2-x)(7-x)}{7-x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+4}{7-x} - \frac{x^2-9x+14}{7-x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+4-(x^2-9x+14)}{7-x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+10x-10}{7-x} \geq 0$$

$\Delta = 10^2 - 4\times(-1)\times(-10) = 60$ donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{-10-\sqrt{60}}{2\times(-1)} = 5+\sqrt{15} \quad \text{et}$$

$$x_2 = \frac{-10+\sqrt{60}}{2\times(-1)} = 5-\sqrt{15}$$

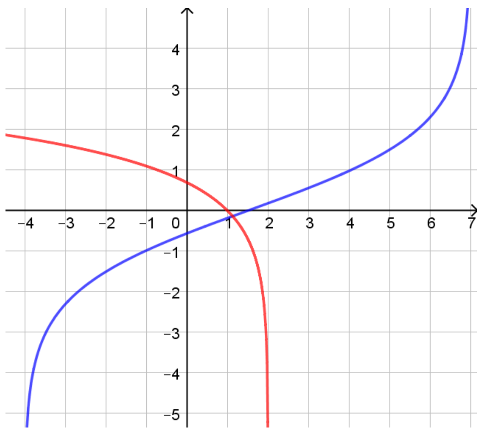
$a=-1$ donc la parabole est orientée vers le bas, ainsi :

$$-x^2+10x-10>0 \quad \text{si} \quad x \in \left]5-\sqrt{15};5+\sqrt{15}\right[$$

$7-x>0 \Leftrightarrow -x>-7 \Leftrightarrow x<7$

Avec un tableau de signes, on obtient :

$$D_R = \left[5-\sqrt{15};7\right[\cap \left[5-\sqrt{15};+\infty\right[$$



3) Solution : $S = D_E \cap D_R = \left[5-\sqrt{15};2\right[$