Applications classiques avec les suites numériques

Exercice 2D.1 : *Educatifs*

Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue n entier naturel :

a) $2^n \leq 100$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 10^{-2}$ c) $0,2 \geq \left(\frac{2}{5}\right)^n$ d) $\left(1+\frac{3}{100}\right)^n \geq 2$

e) $0,7^n \leq 10^{-3}$ f) $121 \times 0,97^{2n+1} \leq 1$ g) $10^{12} \times 2^{-n} \leq 0,1$

Exercice 2D.2 :

Une population de bactéries diminue dans la proportion de 5 % par heure. Au bout de combien d'heures, la population sera-t-elle inférieure ou égale à la moitié de la population initiale ?

Exercice 2D.3 :

Une population augmente de 10 % par an. Au bout de combien d'années cette population aura-t-elle doublé ?

Exercice 2D.4 :

Monsieur Econome place 1 500 euros sur un compte d'épargne à intérêts composés au taux de 2 % l'an.
Dans combien d'années Monsieur X disposera-t-il d'un capital au moins égal à 3 000 euros ?

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 2D.1 : *Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue n entier naturel :*

a) $2^n \le 100 \Leftrightarrow \ln\left(2^n\right) \le \ln 100 \Leftrightarrow n \times \ln 2 \le \ln 100 \Leftrightarrow n \le \dfrac{\ln 100}{\ln 2} \rightarrow n \le 6$

b) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \le 10^{-2} \Leftrightarrow \ln\left(\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right) \le \ln 10^{-2} \Leftrightarrow n \times \ln\dfrac{1}{3} \le -2\ln 10 \Leftrightarrow -n \times \ln 3 \le -2\ln 10$

$\Leftrightarrow n \times \ln 3 \ge 2\ln 10 \Leftrightarrow n \ge \dfrac{2\ln 10}{\ln 3} \rightarrow n \ge 5$

c) $0,2 \ge \left(\dfrac{2}{5}\right)^n \Leftrightarrow \ln 0,2 \le \ln\left(\left(\dfrac{2}{5}\right)^n\right) \Leftrightarrow \ln 0,2 \le n \times \ln\dfrac{2}{5} \Leftrightarrow \dfrac{\ln 0,2}{\ln 0,4} \le n \rightarrow n \ge 2$

d) $\left(1+\dfrac{3}{100}\right)^n \ge 2 \Leftrightarrow \ln\left(1,03^n\right) \ge \ln 2 \Leftrightarrow n \times \ln 1,03 \ge \ln 2 \Leftrightarrow n \ge \dfrac{\ln 2}{\ln 1,03} \rightarrow n \ge 24$

e) $0,7^n \le 10^{-3} \Leftrightarrow \ln\left(0,7^n\right) \le \ln 10^{-3} \Leftrightarrow n \times \ln 0,7 \le -3\ln 10 \Leftrightarrow n \ge \dfrac{-3\ln 10}{\ln 0,7} \rightarrow n \ge 20$

$\rightarrow \ln 0,7 < 0$ d'où l'inversion du symbole de l'inéquation

f) $121 \times 0,97^{2n+1} \le 1 \Leftrightarrow 0,97^{2n+1} \le \dfrac{1}{121} \Leftrightarrow \ln\left(0,97^{2n+1}\right) \le \ln\dfrac{1}{121} \Leftrightarrow (2n+1)\ln 0,97 \le -\ln 121$

$\Leftrightarrow 2n+1 \ge -\dfrac{\ln 121}{\ln 0,97} \Leftrightarrow 2n \ge -\dfrac{\ln 121}{\ln 0,97} - 1 \Leftrightarrow n \ge \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{\ln 121}{\ln 0,97} - 1\right) \rightarrow n \ge 80$

g) $10^{12} \times 2^{-n} \le 0,1 \Leftrightarrow 2^{-n} \le 0,1 \times 10^{-12} \Leftrightarrow \ln\left(2^{-n}\right) \le \ln 10^{-13} \Leftrightarrow -n\ln 2 \le \ln 10^{-13}$

$\Leftrightarrow n \ge \dfrac{\ln 10^{-13}}{-\ln 2} \rightarrow n \ge 44$

Exercice 2D.2 :

Une population de bactéries diminue dans la proportion de 5 % par heure. Au bout de combien d'heures, la population sera-t-elle inférieure ou égale à la moitié de la population initiale ?

On définit la suite $\left(u_n\right)$ caractérisant l'évolution de la population des bactéries.

La population initiale est égale à u_0 puis $u_1 = 0,95u_0$, $u_2 = 0,95u_1$.

La suite $\left(u_n\right)$ est géométrique de premier terme u_0 et de raison $q = 0,95$, son expression générale est :

$$u_n = u_0 \times q^n = u_0 \times 0,95^n$$

On cherche u_n tel que : $u_n \le \dfrac{1}{2}u_0 \Leftrightarrow u_0 \times 0,95^n \le \dfrac{1}{2}u_0$

$$\Leftrightarrow u_0 \times 0,95^n \le \frac{1}{2}u_0$$

$$\Leftrightarrow 0,95^n \le \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(0,95^n\right) \le \ln(0,5)$$

$$\Leftrightarrow n \times \ln 0,95 \le \ln 0,5$$

$$\Leftrightarrow n \ge \frac{\ln 0,5}{\ln 0,95} \quad (\text{car } \ln(0,95) < 0)$$

$$\Leftrightarrow n \ge 13,5$$

La population aura diminué de moitié à partir de la 14ème heure.

Exercice 2D.3 :

Une population augmente de 10 % par an. Au bout de combien d'années cette population aura-t-elle doublé ?

On définit la suite (u_n) caractérisant l'évolution de cette population.

La population initiale est égale à u_0 puis $u_1 = 1{,}1u_0$, $u_2 = 1{,}1u_1$.

La suite (u_n) est géométrique de premier terme u_0 et de raison $q = 1{,}1$, son expression générale est :

$$u_n = u_0 \times q^n = u_0 \times 1{,}1^n$$

On cherche u_n tel que : $u_n \geq 2u_0$

$$\Leftrightarrow u_0 \times 1{,}1^n \geq 2u_0$$
$$\Leftrightarrow 1{,}1^n \geq 2$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(1{,}1^n\right) \geq \ln(2)$$
$$\Leftrightarrow n \times \ln(1{,}1) \geq \ln(2)$$
$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}1)} \qquad \text{(car } \ln(1{,}1) > 0\text{)}$$
$$\Leftrightarrow n \geq 7{,}2$$

La population aura doublé à partir de la 8$^{\text{ème}}$ année.

Exercice 2D.4 :

Monsieur Econome place 1 500 euros sur un compte d'épargne à intérêts composés au taux de 2 % l'an. Dans combien d'années Monsieur X disposera-t-il d'un capital au moins égal à 3 000 euros ?

Chaque année, le capital augmente de 2% donc le coefficient multiplicateur associé est 1,02.
Le capital évolue selon une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1500$ et de raison $q = 1{,}02$:

$$u_n = u_0 \times q^n = 1500 \times 1{,}02^n$$

Ainsi : $u_n \geq 3000 \Leftrightarrow 1500 \times 1{,}02^n \geq 3000 \Leftrightarrow 1{,}02^n \geq 2 \Leftrightarrow \ln\left(1{,}02^n\right) \geq \ln 2 \Leftrightarrow n \ln 1{,}02 \geq \ln 2$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 2}{\ln 1{,}02} \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 2}{\ln 1{,}02} \Leftrightarrow n \geq 34$$

→au bout de 34 ans.