

RAPPEL :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

## EXERCICE 3A.1

Déterminer les limites suivantes :

a.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} -5 \ln x =$

b.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -5 \ln x =$

c.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} 5 + \ln x =$

d.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \ln x =$

e.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2 - \ln x =$

f.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} =$

g.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-3}{\ln x} =$

h.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{7} =$

i.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{2}{3} \ln x =$

j.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\ln x} =$

## EXERCICE 3A.2

Déterminer les limites suivantes, en écrivant chaque fonction  $f$  sous la forme  $v \circ u$  :

a.  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(1+x)$

$f(x) = v \circ u(x)$

$u(x) =$

$v(x) =$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} u(x) =$

donc  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(1+x) = \lim_{u(x) \rightarrow}$

b.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(-2x+1)$

On pose :  $X = \dots\dots\dots$

ainsi :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x+1) = \lim_{X \rightarrow \dots\dots\dots} X = \dots\dots\dots$

donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(-2x+1) = \lim_{X \rightarrow \dots\dots\dots} \ln(\dots\dots\dots) = \dots\dots\dots$

c.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \frac{1}{x}$

$f(x) = v \circ u(x)$

$u(x) =$

$v(x) =$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x) =$

donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{u(x) \rightarrow}$

d.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{1+x}{x}$

On pose :  $X = \dots\dots\dots$

ainsi :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{x} = \lim_{X \rightarrow \dots\dots\dots} X = \dots\dots\dots$

donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{1+x}{x} = \lim_{X \rightarrow \dots\dots\dots} \ln(\dots\dots\dots) = \dots\dots\dots$

## EXERCICE 3A.3

1. Déterminer les limites des fonctions suivantes en  $+\infty$  :

a.  $f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}$

b.  $f(x) = \frac{2 + \ln x}{x}$

c.  $f(x) = x - \ln x$

d.  $f(x) = x^2 - x \ln x$

e.  $f(x) = x^2 - 2x + 3 + 4 \ln x$

f.  $f(x) = 3 \ln x - x - 3$

2. Déterminer les limites des fonctions suivantes en 0 :

a.  $f(x) = x^2 + x \ln x$

b.  $f(x) = 2 + x^3 \ln x$

c.  $f(x) = x(\ln x - 3)$

3. Déterminer les limites des fonctions suivantes en 0 :

a.  $f(x) = x + 1 + \frac{\ln(x+1)}{x}$

b.  $f(x) = \frac{\ln(x+1) + x}{x}$

c.  $f(x) = \frac{x^2 - 2 \ln(x+1)}{x}$

**CORRIGE – NOTRE DAME DE LA MERCI – MONTPELLIER – M. QUET**

**EXERCICE 3A.1** Déterminer les limites suivantes, sachant que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  :

a.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} -5 \ln x = +\infty$

b.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -5 \ln x = -\infty$

c.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} 5 + \ln x = -\infty$

d.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \ln x = +\infty$

e.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2 - \ln x = +\infty$

f.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0^+$

g.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-3}{\ln x} = 0^+$

h.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{7} = +\infty$

i.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{2}{3} \ln x = +\infty$

j.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\ln x} = 0^-$

**EXERCICE 3A.2** Déterminer les limites suivantes, en écrivant chaque fonction  $f$  sous la forme  $v \circ u$  :

a.  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(1+x)$        $f(x) = v \circ u(x)$        $u(x) = 1+x$        $v(x) = \ln x$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} u(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} 1+x = 0^+$        $\rightarrow$  ce qui revient à dire : on pose  $u(x) = 1+x$

donc  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(1+x) = \lim_{u(x) \rightarrow 0^+} \ln(u(x)) = -\infty$

b.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(-2x+1)$       On pose :  $X = -2x+1$

ainsi :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x+1) = \lim_{X \rightarrow +\infty} X = +\infty$

donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(-2x+1) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$

c.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \frac{1}{x}$        $f(x) = v \circ u(x)$        $u(x) = \frac{1}{x}$        $v(x) = \ln x$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$        $\rightarrow$  ce qui revient à dire : on pose  $u(x) = \frac{1}{x}$

donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \frac{1}{x} = \lim_{u(x) \rightarrow +\infty} \ln(u(x)) = +\infty$

d.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{1+x}{x}$       On pose :  $X = \frac{1+x}{x} = \frac{1}{x} + 1$

ainsi :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{x} = \lim_{X \rightarrow 1} X = 1$

donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{1+x}{x} = \lim_{X \rightarrow 1} \ln(X) = 0$

**EXERCICE 3A.3**

1. Déterminer les limites des fonctions suivantes en  $+\infty$ , sachant que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$  :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} = 0$        $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x} = 0$        $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2x + 3 + 4 \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + 4 \frac{\ln x}{x^2}\right) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 \ln x - x - 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(3 \frac{\ln x}{x} - 1 - \frac{3}{x}\right) = -\infty$

2. Déterminer les limites des fonctions suivantes en 0, sachant que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$  :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + x \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 2 + x^3 \ln x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x - 3) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x - 3x) = 0$$

3. Déterminer les limites des fonctions suivantes en 0, sachant que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$  :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x + 1 + \frac{\ln(x+1)}{x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1) + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} + 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 2\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - 2 \frac{\ln(x+1)}{x} = -2$$