Limites de fonctions logarithmiques

Exercice 4B.1

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1-x)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln\left(\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2\ln x$ e) $\lim\limits_{x\to0^+} 2x^2\ln x$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\ln x$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(e^x-x)$ h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^x-x)$ i) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x-\ln x$

Exercice 4B.2

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to0^+} x-4+\ln x$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln 2-3\ln x$ c) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln x}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ e) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln(1+2x)}{x}$

Exercice 4B.1 *Déterminer les limites suivantes*

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1-x)$ on pose : $X=1-x$, avec : $\lim\limits_{x\to-\infty} 1-x=+\infty$

ainsi : $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1-x)=\lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X)=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x}\right)$ on pose : $X=\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x+3}{x^2+x}=\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}=1$$

ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x}\right)=\lim\limits_{X\to1} \ln(X)=0$

c) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln\left(\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x}\right)$ on pose : $X=\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x}$

$\lim\limits_{x\to0^+} x^2-2x+3=3$ et $\lim\limits_{x\to0^+} x^2+x=\lim\limits_{x\to0^+} x(x+1)=0^+$ d'où : $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x}=+\infty$

ainsi : $\lim\limits_{x\to0^+} \ln\left(\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x}\right)=\lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X)=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2\ln x$ $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$

par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2\ln x=+\infty$

e) $\lim\limits_{x\to0^+} 2x^2\ln x$ par croissances comparées : $\lim\limits_{x\to0^+} 2x^2\ln x=0$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\ln x=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)$ → par croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}=0$

ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{\ln x}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\ln x=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)=+\infty$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(e^x-x\right)$ on pose : $X=e^x-x$ avec $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x-x=+\infty$

ainsi : $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(e^x-x\right)=\lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X)=+\infty$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(e^x-x\right)$ on pose : $X=e^x-x$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x-x=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{e^x}{x}-1\right)$

par croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x}=+\infty$, par somme et produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{e^x}{x}-1\right)=+\infty$

ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(e^x-x\right)=\lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X)=+\infty$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x-\ln x=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{\ln x}{x}\right)$

par croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}=0$

ainsi, par somme et produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x-\ln x=+\infty$

Exercice 4B.2 *Déterminer les limites suivantes*

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x-4+\ln x$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0^+} x-4=-4$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x=-\infty$

par somme : $\lim\limits_{x\to 0^+} x-4+\ln x=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln 2-3\ln x$

par produit et par somme : $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln 2-3\ln x=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x}$ $\qquad$ on pose : $X=\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{X}$

ainsi : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{X\to +\infty} \dfrac{\ln \frac{1}{X}}{\frac{1}{X}}=\lim\limits_{X\to +\infty} -X\ln X=-\infty$

plus simple : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x=0^+$: par quotient : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x}=-\infty$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ $\qquad$ on pose : $X=1+\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow X-1=\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow \dfrac{1}{X-1}=x$

ainsi : $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{X\to 1} \dfrac{1}{X-1}\ln X=\lim\limits_{X\to 1} \dfrac{\ln X}{X-1}=1$

e) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+2x)}{x}$ $\qquad$ on pose : $X=1+2x \Leftrightarrow X-1=2x \Leftrightarrow \dfrac{X-1}{2}=x$

ainsi : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+2x)}{x}=\lim\limits_{X\to 1} \dfrac{1}{\frac{X-1}{2}}\ln X=\lim\limits_{X\to 1} 2\times\dfrac{\ln X}{X-1}=2$