

DERIVEES DE FONCTIONS COMPOSEES AVEC LES LOGARITHMES

EXERCICE 5A.1

Déterminer la dérivée de chaque fonction f définie et dérivable sur I :

- | | | | |
|---|--|--|---|
| a. $f(x) = \ln(3x+4)$ | $I = \left] -\frac{4}{3}; +\infty \right[$ | b. $f(x) = \ln(7-3x)$ | $I = \left] -\infty; \frac{3}{2} \right[$ |
| c. $f(x) = \ln(x^2+2x+6)$ | $I = \mathbb{R}$ | d. $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$ | $I =]0; +\infty[$ |
| e. $f(x) = \ln\left(\frac{3x+4}{x+2}\right)$ | $I =]-1; +\infty[$ | f. $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+x+2}{x+2}\right)$ | $I = \mathbb{R}$ |
| g. $f(x) = \ln(\sqrt{x})$ | $I =]0; +\infty[$ | h. $f(x) = \ln(\ln x)$ | $I =]1; +\infty[$ |
| i. $f(x) = x \ln(3x-6)$ | $I =]2; +\infty[$ | j. $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$ | $I =]0; +\infty[$ |

EXERCICE 4A.1

Dans chaque cas, déterminer la dérivée de la fonction f définie et dérivable sur I :

a. $f(x) = \ln(3x+4)$ $f'(x) = \frac{3}{3x+4}$

b. $f(x) = \ln(7-3x)$ $f'(x) = \frac{-3}{7-3x}$

c. $f(x) = \ln(x^2+2x+6)$ $f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+6}$

d. $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$ $f'(x) = \frac{\frac{1 \times x - (x+2) \times 1}{x^2}}{\frac{x+2}{x}} = \frac{x-x-2}{x^2} \times \frac{x}{x+2} = \frac{-2}{x(x+2)}$

e. $f(x) = \ln\left(\frac{3x+4}{x+2}\right)$ $f'(x) = \frac{\frac{3(x+2) - (3x+4)}{(x+2)^2}}{\frac{3x+4}{x+2}} = \frac{3x+6-3x-4}{(x+2)^2} \times \frac{x+2}{3x+4} = \frac{2}{(x+2)(3x+4)}$

f. $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+x+2}{x+2}\right)$ $f'(x) = \frac{\frac{(2x+1)(x+2) - (x^2+x+2)}{(x+2)^2}}{\frac{x^2+x+2}{x+2}} = \frac{2x^2+5x+2 - (x^2+x+2)}{(x+2)^2} \times \frac{x+2}{x^2+x+2}$
 $= \frac{x^2+4x}{(x+2)(x^2+x+2)}$

g. $f(x) = \ln(\sqrt{x})$ $f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$

h. $f(x) = \ln(\ln x)$ $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{1}{x \ln x}$

i. $f(x) = x \ln(3x-6)$ $f'(x) = 1 \times \ln(3x-6) + x \times \frac{3}{3x-6} = \ln(3x-6) + \frac{x}{x-2}$

j. $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$ $f'(x) = \frac{\frac{1}{x+1} \times \ln x - \ln(x+1) \times \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\frac{\ln x}{x+1} \times \frac{x}{x} - \frac{\ln(x+1)}{x} \times \frac{x+1}{x+1}}{(\ln x)^2}$
 $= \frac{\frac{x \ln x - (x+1) \ln(x+1)}{x(x+1)}}{(\ln x)^2} = \frac{x \ln x - (x+1) \ln(x+1)}{x(x+1)(\ln x)^2}$