

EXERCICE 6A.1

Soit la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{\ln x}{x}$$

1. **a.** Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- b.** En déduire que C , la courbe représentative de f , admet une asymptote (d) dont on précisera l'équation.
2. **a.** Montrer que C , la courbe représentative de f , admet la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ pour asymptote en $+\infty$.
- b.** Etudier la position de C par rapport à (Δ) .
3. **a.** Calculer la fonction dérivée de f .
- b.** On admet que f' est strictement positive sur $]0 ; +\infty[$. En déduire le sens de variation de f .
4. Dans un repère orthonormé (unité : 1 cm), tracer C , (Δ) , et (d) .

EXERCICE 5A.2

Soit la fonction définie sur $]2 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \ln \frac{x-2}{x+2}$$

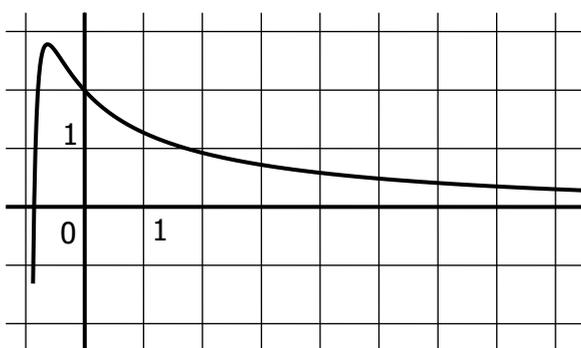
1. **a.** Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- b.** En déduire que C , la courbe représentative de f , admet une asymptote (d) dont on précisera l'équation.
2. **a.** Montrer que C , la courbe représentative de f , admet la droite (Δ) d'équation $y = x$ pour asymptote en $+\infty$.
- b.** Etudier la position de C par rapport à (Δ) .
3. **a.** Calculer la fonction dérivée de f .
- b.** Etudier le signe de f' .
- c.** En déduire le sens de variation de f .
4. Dans un repère orthonormé (unité : 1 cm), tracer C , (Δ) , et (d) , ainsi que la tangente à la courbe au point 4.

EXERCICE 5A.3 - BTS 2005

Soit f la fonction définie sur $] -1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2 + \ln(1+x)}{1+x}$$

Sa courbe représentative C dans un repère orthonormal est donnée ci-dessous :



1. On admet que :

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Que peut-on en déduire pour la courbe C .

2. **a.** Démontrer que pour tout x de $] -1 ; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2}$$

- b.** Résoudre l'inéquation $-1 - \ln(1+x) \geq 0$.

En déduire le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans $] -1 ; +\infty[$.

- c.** Etablir le tableau de variation de f .

EXERCICE 6A.4 - BAC 2009

Partie A : Soit la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - \ln x + 2x^2$$

1. Montrer que : $g'(x) = \frac{(2x+1)(2x-1)}{x}$

2. **a.** Etudier le signe de $g'(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.

- b.** Calculer $g\left(\frac{1}{2}\right)$

- c.** Dresser le tableau de variation de g sur $]0 ; +\infty[$ (sans les limites).

3. En déduire que pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $g(x)$ est strictement positif.

Partie B : Soit la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} + 2x - 3$$

On appelle C sa courbe dans le repère orthogonal (O, I, J) (unités : 2 cm en abscisses, 1 cm en ordonnées).

1. Etudier la limite de f en 0. En déduire que C admet une asymptote que l'on précisera.
2. Etudier la limite de f en $+\infty$ et démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote à C en $+\infty$.
3. Montrer que pour tout x strictement positif :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.

4. Dresser le tableau de variation de f .
5. Soit A et B les points de C d'abscisses respectives e et \sqrt{e} .
 - a.** Donne les valeurs arrondies au centième des coordonnées de A et B .
 - b.** En déduire que f est positive sur $[\sqrt{e} ; e]$.
6. Tracer la droite (Δ) , la courbe C et placer A et B .
7. **a.** Démontrer qu'au point A , la courbe C admet une tangente parallèle à (Δ) .
- b.** Le point A est-il le seul point de C admettant une tangente parallèle à (Δ) ?

**CORRIGE – NOTRE DAME DE LA MERCI
MONTPELLIER – M. QUET**

EXERCICE 6A.1

Soit la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{\ln x}{x}$$

- 1. a.** Limites de f aux bornes de son ensemble de définition :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Par somme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x + 1 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

Par somme : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

- b.** La courbe représentative de f , admet une asymptote verticale (d) d'équation : $y = 0$.

- 2. a.** $f(x) - (x + 1) = x + 1 + \frac{\ln x}{x} - (x + 1) = \frac{\ln x}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x + 1) = 0$$

C, la courbe représentative de f , admet la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ pour asymptote en $+\infty$.

- b.** Position de **C** par rapport à (Δ) :

$$\forall x \in]1; +\infty[: \frac{\ln x}{x} > 0 \quad \text{donc} \quad \mathbf{C} \text{ est au-dessus de } (\Delta)$$

$$\forall x \in]0; 1[: \frac{\ln x}{x} < 0 \quad \text{donc} \quad \mathbf{C} \text{ est au-dessous de } (\Delta)$$

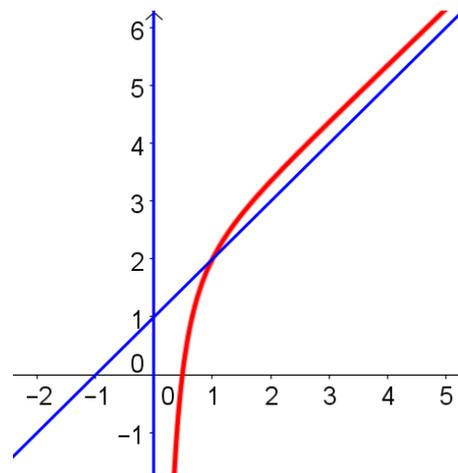
- 3. a.** f est dérivable en tant que somme et quotient de fonction logarithme et polynômiale.

$$\forall x \in]0; +\infty[: f'(x) = 1 + \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 + 1 - \ln x}{x^2}$$

- b.** On admet que f' est strictement positive sur $]0; +\infty[$ donc la fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

4.



La Merci
MONTPELLIER

EXERCICE 6A.2

Soit la fonction définie sur $]2; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \ln \frac{x-2}{x+2} = x + \ln \frac{x \left(1 - \frac{2}{x}\right)}{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)} = x + \ln \frac{1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{2}{x}}$$

- 1. a.** Limites de f aux bornes de son ensemble de définition :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = 1 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = 0$$

Par somme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} x = 2 ; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x+2} = 0^+ ; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln \frac{x-2}{x+2} = -\infty$$

Par somme : $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$

- b.** La courbe représentative de f , admet une asymptote verticale (d) d'équation : $x = 2$.

- 2. a.** $f(x) - x = x + \ln \frac{x-2}{x+2} - x = \ln \frac{x-2}{x+2}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x-2}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = 0$$

La courbe représentative de f , admet la droite (Δ) d'équation $y = x$ pour asymptote oblique en $+\infty$.

- b.** Position de **C** par rapport à (Δ) :

$$\ln \frac{x-2}{x+2} > 0 \Leftrightarrow \ln \frac{x-2}{x+2} > \ln 1 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x+2} > 1$$

$$\Leftrightarrow x - 2 > x + 2 \Leftrightarrow -2 > 2 : \mathbf{IMPOSSIBLE}$$

$$\forall x \in]2; +\infty[: \ln \frac{x-2}{x+2} < 0 : \mathbf{C} \text{ est au-dessous de } (\Delta)$$

- 3. a.** f est dérivable en tant que somme et quotient de fonction logarithme et polynômiale.

$$\forall x \in]2; +\infty[: f'(x) = 1 + \frac{1 \times (x+2) - (x-2) \times 1}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{x+2-x+2}{(x+2)^2} \times \frac{x+2}{x-2}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{x+2-x+2}{(x+2)(x-2)} \times \frac{x+2}{x-2}$$

$$f'(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x-2)} + \frac{4}{(x+2)(x-2)}$$

$$f'(x) = \frac{x^2-4+4}{(x+2)(x-2)} = \frac{x^2}{(x+2)(x-2)}$$

b. $\forall x \in]2; +\infty[: x+2 > 0$ et $x-2 > 0$

donc $\forall x \in]2; +\infty[: f'(x) > 0$

c. Ainsi $\forall x \in]2; +\infty[$, la fonction f est croissante.

4. Tangente à la courbe au point 4 :

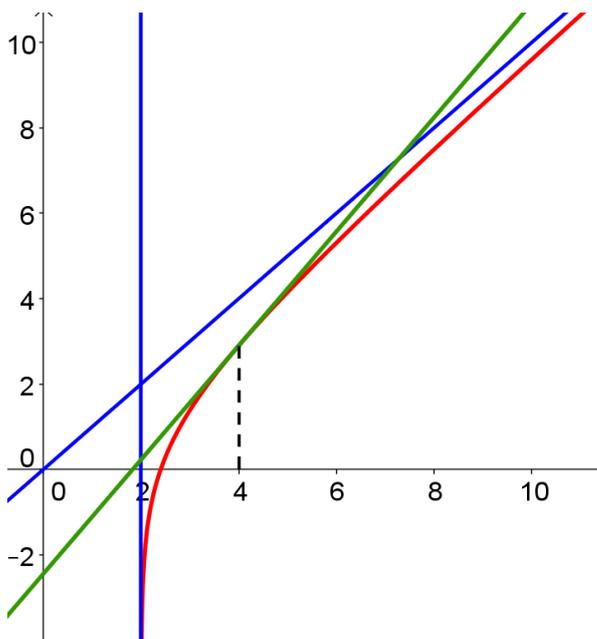
$$T_4 : y = f'(4)(x-4) + f(4)$$

$$f'(4) = \frac{4^2}{(4+2)(4-2)} = \frac{16}{6 \times 2} = \frac{4}{3}$$

$$f(4) = 4 + \ln \frac{4-2}{4+2} = 4 + \ln \frac{2}{6} = 4 - \ln 3$$

$$T_4 : y = \frac{4}{3}(x-4) + 4 - \ln 3 = \frac{4}{3}x - \frac{16}{3} + 4 - \ln 3$$

$$T_4 : y = \frac{4}{3}x - \frac{4}{3} - \ln 3$$

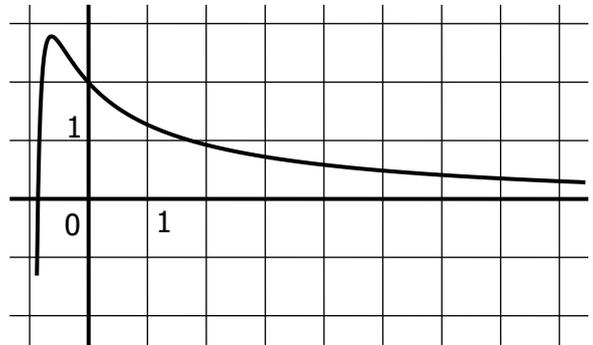


EXERCICE 6A.3 - BTS 2005

Soit f la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2 + \ln(1+x)}{1+x}$$

Sa courbe représentative C dans un repère orthonormal est donnée ci-dessous :



1. On admet que :

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

La courbe C admet deux asymptotes, l'une horizontale d'équation $y = 0$ et une verticale d'équation $x = -1$.

2. a. f est dérivable en tant que quotient de fonction logarithme et polynôme.

$$\forall x \in]-1; +\infty[:$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x} \times (1+x) - [2 + \ln(1+x)] \times 1}{(1+x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 - 2 - \ln(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{-1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2}$$

b. $-1 - \ln(1+x) \geq 0 \Leftrightarrow -\ln(1+x) \geq 1$

$$\Leftrightarrow \ln(1+x) \leq -1 \Leftrightarrow 1+x \leq e^{-1}$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{e} - 1 \Leftrightarrow x \leq \frac{1-e}{e}$$

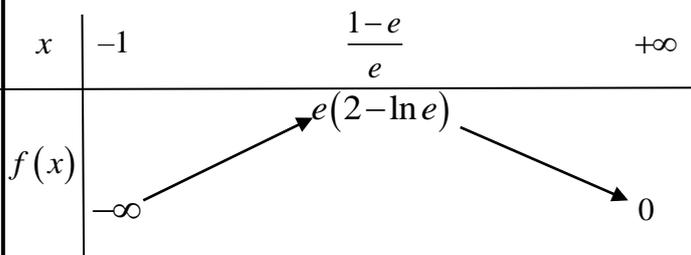
$$\forall x \in \left] -1; \frac{1-e}{e} \right[: f'(x) \geq 0$$

$$\forall x \in \left] \frac{1-e}{e}; +\infty \right[: f'(x) \leq 0$$

c. Tableau de variation de f .

$$f\left(\frac{1-e}{e}\right) = \frac{2 + \ln\left(1 + \frac{1-e}{e}\right)}{1 + \frac{1-e}{e}} = \frac{2 + \ln\left(\frac{e}{e} + \frac{1-e}{e}\right)}{\frac{e}{e} + \frac{1-e}{e}}$$

$$f\left(\frac{1-e}{e}\right) = \frac{2 + \ln\left(\frac{1}{e}\right)}{\frac{1}{e}} = e(2 - \ln e)$$

**EXERCICE 6A.4 - BAC 2009****Partie A**

Soit la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - \ln x + 2x^2$$

1. g est dérivable en tant que somme de fonctions logarithme et polynômiale :

$$\forall x \in]0; +\infty[: g'(x) = -\frac{1}{x} + 4x = \frac{4x^2 - 1}{x}$$

$$g'(x) = \frac{(2x+1)(2x-1)}{x}$$

2. a. $\forall x \in]0; +\infty[: 2x+1 > 0$ et $x > 0$

$$2x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

$$\forall x \in \left]0; \frac{1}{2}\right[: g'(x) \leq 0$$

$$\forall x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[: g'(x) \geq 0$$

b. $g\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \ln \frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \ln 2 + 2 \times \frac{1}{4}$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{2} + \ln 2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + \ln 2$$

- c. Dresser le tableau de variation de g sur $]0; +\infty[$ (sans les limites).

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$		$1,5 + \ln 2$	

3. $g\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$

$\forall x \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$ g est continue et strictement décroissante, d'après le théorème de la bijection, g ne s'annule pas sur $\left]0; \frac{1}{2}\right[$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \ln x + 2x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + x^2 \left(\frac{-\ln x}{x^2} + 2 \right)$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\ln x}{x^2} + 2 = 2$

Donc par somme et produit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

$\forall x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ g est continue et strictement croissante, d'après le théorème de la bijection, g ne s'annule pas sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

DONC $\forall x \in]0; +\infty[: g(x)$ est strictement positif.

Partie B

Soit la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} + 2x - 3$$

On appelle C sa courbe dans le repère orthogonal (O, I, J) (unités : 2 cm en abscisses, 1 cm en ordonnées).

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x - 3 = -3$

Donc par somme : $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$

C admet une asymptote d'équation : $x = 0$.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 3 = +\infty$

Par somme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - (2x - 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$$

Donc la droite (Δ) d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote à C en $+\infty$.

3. f est dérivable en tant que somme et quotient de fonction logarithme et polynômiale.

$$\forall x \in]0; +\infty[: f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} + 2$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} + \frac{2x^2}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

Or $\forall x \in]0; +\infty[: g(x) > 0$ donc $f'(x) > 0$

4. Tableau de variation de f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

5. Soit A et B les points de C d'abscisses respectives e et \sqrt{e} .

$$\text{a. } f(e) = \frac{\ln e}{e} + 2e - 3 = \frac{1 + 2e^2 - 3e}{e}$$

$$\begin{aligned} f(\sqrt{e}) &= \frac{\ln \sqrt{e}}{\sqrt{e}} + 2\sqrt{e} - 3 = \frac{\frac{1}{2} \ln e}{\sqrt{e}} + 2\sqrt{e} - 3 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{e}} + 2\sqrt{e} - 3 = \frac{\sqrt{e}}{2e} + 2\sqrt{e} - 3 \\ &= \frac{\sqrt{e} + 4e\sqrt{e} - 6e}{2e} \end{aligned}$$

$$A\left(e; \frac{1 + 2e^2 - 3e}{e}\right) \text{ et } B\left(\sqrt{e}; \frac{\sqrt{e} + 4e\sqrt{e} - 6e}{2e}\right)$$

$$A(2,72; 2,80) \text{ et } B(1,65; 0,60)$$

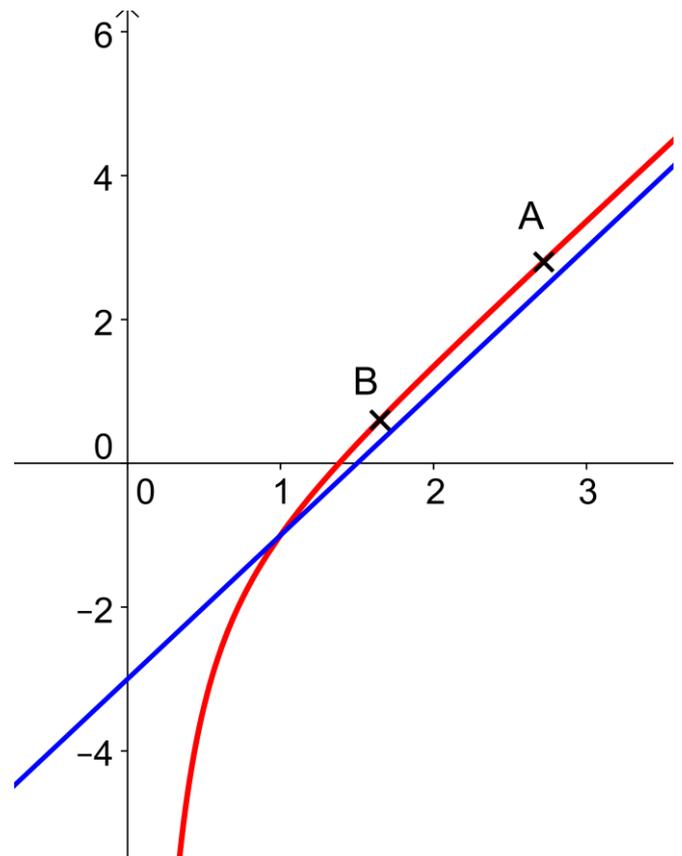
(valeurs arrondies au centième).

b. $f(\sqrt{e}) > 0$ et f est continue et strictement croissante sur $[\sqrt{e}; e]$.

Donc f est positive sur $[\sqrt{e}; e]$.

6. Tracer la droite (Δ), la courbe C et placer A et B.

La Merci
MONTPELLIER



$$7. \text{ a. } f'(e) = \frac{1 - \ln e + 2e^2}{e^2} = \frac{2e^2}{e^2} = 2$$

Or la droite (Δ) a pour équation $y = 2x - 3$
Donc au point A, la courbe C admet une tangente parallèle à (Δ) :

$$\text{b. } f'(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x + 2x^2}{x^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow 1 - \ln x + 2x^2 = 2x^2 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 = \ln x \Leftrightarrow x = e$$

Le point A est le seul point de C admettant une tangente parallèle à (Δ) .