EXERCICE 7A.1 Dans tous les cas, x est un réel strictement positif. Ecrire sous la forme x^{α}

a. $e^{4\ln x} =$	**b.** $e^{\frac{2}{3}\ln x} =$
c. $\dfrac{x^7}{x^5} =$	**d.** $\dfrac{3}{4}\ln\left(e^x\right) =$
e. $e^{4\ln x} \times e^{-7\ln x} =$	**f.** $\sqrt[5]{x} =$
g. $\sqrt[3]{x^2} =$	**h.** $\left(\sqrt[7]{x}\right)^2 =$
i. $\left(e^{4\ln x}\right)^{\frac{1}{6}} =$	**j.** $\left(\sqrt[3]{x^5}\right)^{-2} =$

EXERCICE 7A.2

a. Déterminer la dérivée et une primitive de chacune de ces fonctions :

$F(x) =$	$f(x) = x^{\frac{3}{2}}$	$f'(x) =$
$G(x) =$	$g(x) = x^{\frac{3}{4}}$	$g'(x) =$
$H(x) =$	$h(x) = x^{-\frac{5}{3}}$	$h'(x) =$
$K(x) =$	$k(x) = x^{\frac{1}{7}}$	$k'(x) =$

b. Retrouver la dérivée et une primitive de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ en utilisant la notation $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

c. Déterminer la dérivée et une primitive de la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

EXERCICE 7A.3 On considère les fonctions suivantes, toutes définies (au moins) sur $]0;+\infty[$ par :

$f(x) = e^x$ $\qquad g(x) = \ln x$ $\qquad h(x) = x^{\frac{3}{4}}$ $\qquad k(x) = x^{-\frac{5}{3}}$

Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{h(x)} =$ $\qquad$ b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{k(x)}{g(x)} =$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{k(x)} =$ $\qquad$ d. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{h(x)} =$

e. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{k(x)}{h(x)} =$ $\qquad$ f. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$

g. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h(x)}{g(x)} =$ $\qquad$ h. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h(x)}{k(x)} =$

CORRIGE – NOTRE DAME DE LA MERCI – MONTPELLIER – M. QUET

EXERCICE 7A.1

Dans tous les cas, x est un réel strictement positif. Ecrire sous la forme x^{α} .

a. $e^{4\ln x}=e^{\ln x^4}=x^4$	**b.** $e^{\frac{2}{3}\ln x}=e^{\ln x^{\frac{2}{3}}}=x^{\frac{2}{3}}$
c. $\dfrac{x^7}{x^5}=x^{7-5}=x^2$	**d.** $\dfrac{3}{4}\ln\left(e^x\right)=\dfrac{3}{4}x$
e. $e^{4\ln x}\times e^{-7\ln x}=e^{\ln x^4}\times e^{\ln x^{-7}}=x^4\times x^{-7}=x^{-3}$	**f.** $\sqrt[5]{x}=x^{\frac{1}{5}}$
g. $\sqrt[3]{x^2}=\left(x^2\right)^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{2}{3}}$	**h.** $\left(\sqrt[7]{x}\right)^2=\left(x^{\frac{1}{7}}\right)^2=x^{\frac{2}{7}}$
i. $\left(e^{4\ln x}\right)^{\frac{1}{6}}=\left(x^4\right)^{\frac{1}{6}}=x^{\frac{4}{6}}=x^{\frac{2}{3}}$	**j.** $\left(\sqrt[3]{x^5}\right)^{-2}=\left[\left(x^5\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{-2}=\left(x^{\frac{5}{3}}\right)^{-2}=x^{\frac{-10}{3}}$

EXERCICE 7A.2

a. *Déterminer la dérivée et une primitive de chacune de ces fonctions :*

$F(x)=\dfrac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}=\dfrac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}=\dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$	$f(x)=x^{\frac{3}{2}}$	$f'(x)=\dfrac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}=\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$
$G(x)=\dfrac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1}=\dfrac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}}=\dfrac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}$	$g(x)=x^{\frac{3}{4}}$	$g'(x)=\dfrac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1}=\dfrac{3}{4}x^{\frac{-1}{4}}$
$H(x)=\dfrac{x^{-\frac{5}{3}+1}}{-\frac{5}{3}+1}=\dfrac{x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}}=-\dfrac{3}{2}x^{-\frac{2}{3}}$	$h(x)=x^{-\frac{5}{3}}$	$h'(x)=-\dfrac{5}{3}x^{-\frac{5}{3}-1}=-\dfrac{5}{3}x^{-\frac{8}{3}}$
$K(x)=\dfrac{x^{\frac{1}{7}+1}}{\frac{1}{7}+1}=\dfrac{x^{\frac{8}{7}}}{\frac{8}{7}}=\dfrac{7}{8}x^{\frac{8}{7}}$	$k(x)=x^{\frac{1}{7}}$	$k'(x)=\dfrac{1}{7}x^{\frac{1}{7}-1}=\dfrac{1}{7}x^{\frac{-6}{7}}$

b. *Retrouver la dérivée et une primitive de la fonction* $x\mapsto\sqrt{x}$ *en utilisant la notation* $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$.

→ $f'(x)=\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

→ $F(x)=\dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}=\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}=\dfrac{2}{3}\times x\times x^{\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$

c. *Déterminer la dérivée et une primitive de la fonction définie sur* $[0;+\infty[$ *par* $f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$.

→ $f'(x)=\dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}=\dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}\times x^{-1}=\dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{3x}$

→ $F(x)=\dfrac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}=\dfrac{x^{\frac{1}{3}}\times x^{1}}{\frac{4}{3}}=\dfrac{3}{4}x\times\sqrt[3]{x}$

EXERCICE 7A.3 *On considère les fonctions suivantes, toutes définies (au moins) sur* $]0;+\infty[$ *par :*

$$f(x)=e^x \qquad g(x)=\ln x \qquad h(x)=x^{\frac{3}{4}} \qquad k(x)=x^{-\frac{5}{3}}$$

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{h(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^{\frac{3}{4}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\times\frac{1}{x^{-\frac{1}{4}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\times x^{\frac{1}{4}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{k(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{-\frac{5}{3}}}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}\times\ln x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{k(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^{-\frac{5}{3}}}=\lim_{x\to+\infty}e^x\times x^{\frac{5}{3}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{h(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\frac{3}{4}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\frac{2}{4}}}\times\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\frac{1}{2}}}\times\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\times\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{k(x)}{h(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{-\frac{5}{3}}}{x^{\frac{3}{4}}}=\lim_{x\to+\infty}x^{-\frac{5}{3}}\times x^{-\frac{3}{4}}=\lim_{x\to+\infty}x^{-\frac{5}{3}-\frac{3}{4}}=\lim_{x\to+\infty}x^{-\frac{20}{12}-\frac{9}{12}}=\lim_{x\to+\infty}x^{-\frac{29}{12}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\frac{29}{12}}}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\ln x}\times\frac{x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}\right)\times\left(\frac{x}{\ln x}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{3}{4}}}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{2}{4}}\times x^{\frac{1}{4}}}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln x}\times x^{\frac{1}{4}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{k(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{-\frac{5}{3}}}=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{4}}\times x^{\frac{5}{3}}=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{9}{12}}\times x^{\frac{20}{12}}=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{29}{12}}=+\infty$$