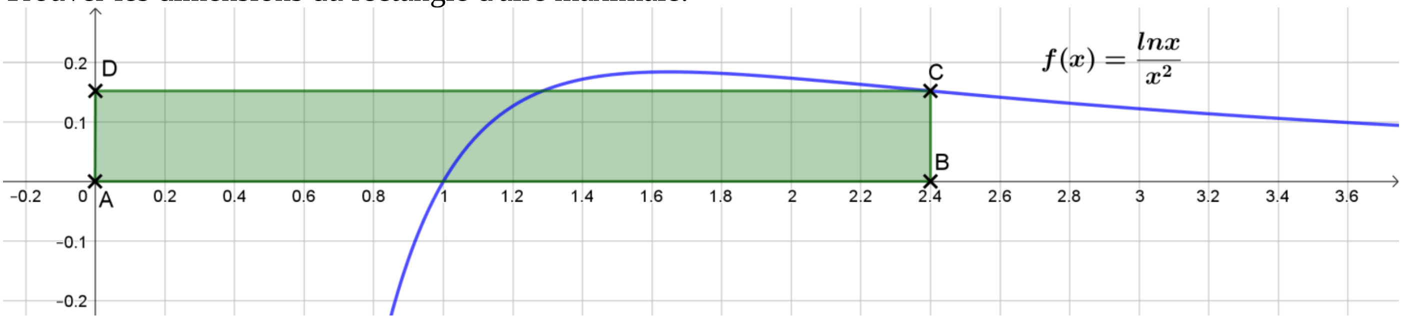
# Exercices à prise d'initiative sur les logarithmes (fiche 1)

**Exercice 1 :** Soit $C$ la courbe représentative de la fonction ln dans un repère orthonormal d'origine O.
Pour quel(s) point(s) M de la courbe $C$, la distance OM est-elle minimale ?

**Exercice 2 :**
Le rectangle ci-dessous (le schéma est donné à titre indicatif) a un côté sur l'axe des abscisses, un autre sur l'axe des ordonnées et l'un de ses sommets sur la courbe $C_f$ : $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$

Trouver les dimensions du rectangle d'aire maximale.




**Exercice 3 :**
Soit $f_k$ la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f_k(x) = x\ln x + kx$ pour tout $k$ réel et $C_k$ sa courbe représentative. En quel réel $x_k$ la fonction $f_k$ admet-elle un minimum ? Quelle est alors la courbe décrite par le point $M_k$ de $C_k$ d'abscisse $x_k$ ?

**Exercice 4 :** Comparer : $a = 2016^{2018}$ et $b = 2017^{2017}$.

**Exercice 5 :** Soit $n$ un entier strictement positif.
Soit la fonction $f_n$ définie sur l'ensemble des nombres réels par : $f_n(x) = 2ne^x - e^{2x}$
et $C_n$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.
On admet que $f_n$ est dérivable et que $C_n$ admet une tangente horizontale en un unique point $S_n$.
Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

VRAI ou FAUX : Pour tout entier strictement positif n, l'ordonnée du point $S_n$ est $n^2$.

**Exercice 6 :** Résoudre l'équation : $16^x + 20^x = 25^x$

**Exercice 7 :**
Trouver l'ensemble des couples entiers $(x;y)$ solutions de l'équation : $x^y = y^x$.

**Exercice 8 :** **BAC Guyane – Sept 2014**
On considère l'équation $(E_1) : e^x - x^n = 0$ où $x$ est un réel strictement positif et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que l'équation $(E_1)$ est équivalente à l'équation $(E_2) : \ln(x) - \dfrac{x}{n} = 0$.
2. Pour quelles valeurs de $n$ l'équation $(E_1)$ admet-elle deux solutions ?

**Exercice 9 :** Résoudre l'équation : $\dfrac{3^x}{4^x} = \dfrac{5}{2^x}$

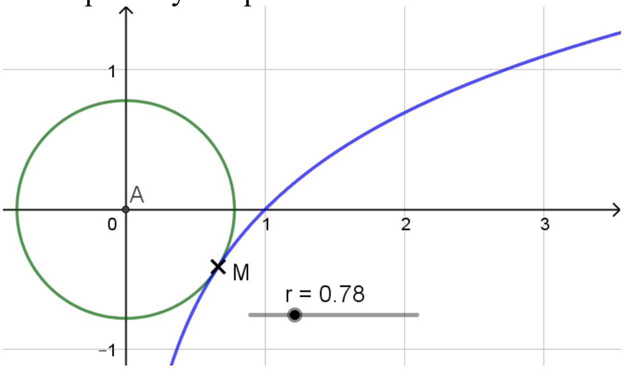
**Exercice 10 :** Résoudre les équations : $x^{\ln x} = 2$ , $x\ln x = 2$ et $x^{\ln x} = x\ln x$

**Exercice 11 :** Résoudre les équations : $x^{x^3} = 2$ et $x^{x^3} = 3$

## Exercice 1 :

*Soit C la courbe représentative de la fonction ln dans un repère orthonormal d'origine O.*
*Pour quel(s) point(s) M de la courbe C, la distance OM est-elle minimale ?*

En utilisant Geogebra, il semblerait qu'il n'y ait qu'une seule solution :




Les coordonnées du point M sont $(x;\ln x)$ donc la distance OM mesure :

$$\text{OM}=\sqrt{x^2+\ln^2 x}.$$

Il sera plus simple d'étudier la distance $\text{OM}^2=x^2+\ln^2 x$.

On pose pour tout réel $x$ strictement positif la fonction $f$ définie par :

$$f(x)=x^2+\ln^2 x.$$

Cette fonction est dérivable comme somme de fonctions polynomiale et carré d'exponentielle :

$$f'(x)=2x+2\ln x\times\frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} f'(x)>0 \ &\Leftrightarrow\ 2x+2\ln x\times\frac{1}{x}>0\\ &\Leftrightarrow\ \frac{2x^2+2\ln x}{x}>0\\ &\Leftrightarrow\ 2\left(x^2+\ln x\right)>0\\ &\Leftrightarrow\ x^2+\ln x>0\end{aligned}$$

On pose pour tout réel $x$ strictement positif la fonction $g$ définie par :

$$g(x)=x^2+\ln x.$$

Cette fonction est dérivable comme somme de fonctions polynomiale et exponentielle :

$$g'(x)=2x+\frac{1}{x}$$

$$g'(x)>0\ \Leftrightarrow\ 2x+\frac{1}{x}>0\ \Leftrightarrow\ \frac{2x^2+1}{x}>0\ \Leftrightarrow\ 2x^2+1>0\ \Leftrightarrow\ x^2>-\frac{1}{2}$$

Cette dérivée est strictement positive donc la fonction $g$ est strictement croissante et continue.

Or $\quad g\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ln\frac{1}{2}=\frac{1}{4}-\ln 2$

$$g(1)=1^2+\ln 1=1$$

Ainsi $g\left(\frac{1}{2}\right)<0$ et $g(1)>0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha\in\left[\frac{1}{2};1\right]$ tel que $g(\alpha)=0$.

On trouve $\alpha\simeq 0,653$.

Ainsi, sur l'intervalle $]0;0,653[$, la fonction $g$ est négative donc $f'(x)<0$ et la fonction $f$ est décroissante

Ainsi, sur l'intervalle $]0,653;+\infty[$, la fonction $g$ est positive donc $f'(x)>0$ et la fonction $f$ est croissante.

Le minimum de la fonction $f$ est : $f(0,653)\simeq 0,608$ d'où une distance OM minimale égale à :

$$\sqrt{0,608}\simeq 0,780.$$

Les coordonnées du point M recherché sont : $(0,653;\ln 0,653)$ soit environ : $(0,653;-0,43)$.

Concernant la valeur $\alpha$, on remarque que :

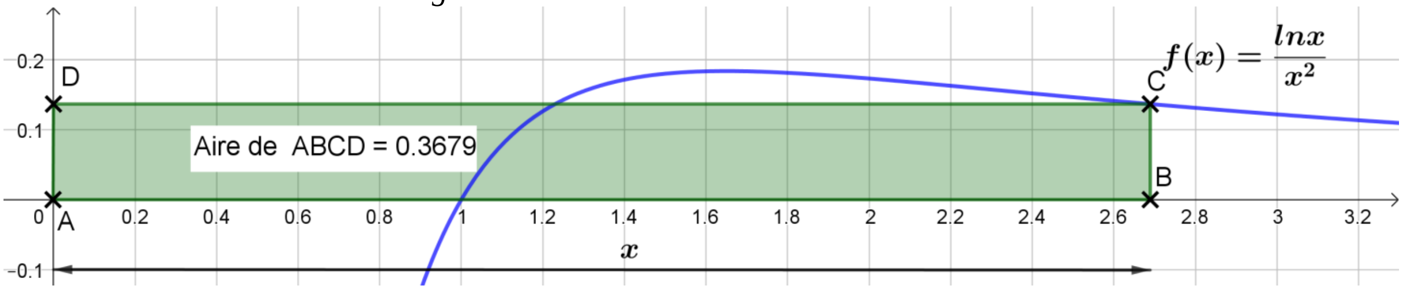
$$g(\alpha)=0 \iff \alpha^2+\ln\alpha=0 \iff \ln\alpha=-\alpha^2$$

Donc : $$f(\alpha)=\alpha^2+\ln^2\alpha=\alpha^2+\left(-\alpha^2\right)^2=\alpha^2+\alpha^4=\alpha^2\left(1+\alpha^2\right)$$

## Exercice 2 :

*Le rectangle ci-dessous (le schéma est donné à titre indicatif) a un côté sur l'axe des abscisses, un autre sur l'axe des ordonnées et l'un de ses sommets sur la courbe* $C_f$ : $y=\dfrac{\ln x}{x^2}$

*Trouver les dimensions du rectangle d'aire maximale.*




Le point C appartient à la courbe $C_f$ donc ses coordonnées sont $C\left(x;\dfrac{\ln x}{x^2}\right)$.

Ainsi la distance AB est égale à $x$ et la distance BC est égale à $\dfrac{\ln x}{x^2}$.

L'aire du rectangle est donnée par AB×AC, on utilise une fonction $A(x)=x\times\dfrac{\ln x}{x^2}=\dfrac{\ln x}{x}$.

La fonction A est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que composée de fonctions logarithme et polynomiale :

$$\forall x\in]0;+\infty[,\quad A'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x\times 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

Le dénominateur est strictement positif sur $]0;+\infty[$.

Etude du numérateur : $1-\ln x>0 \iff 1>\ln x \iff e>x$ (car l'exponentielle est une fonction croissante).

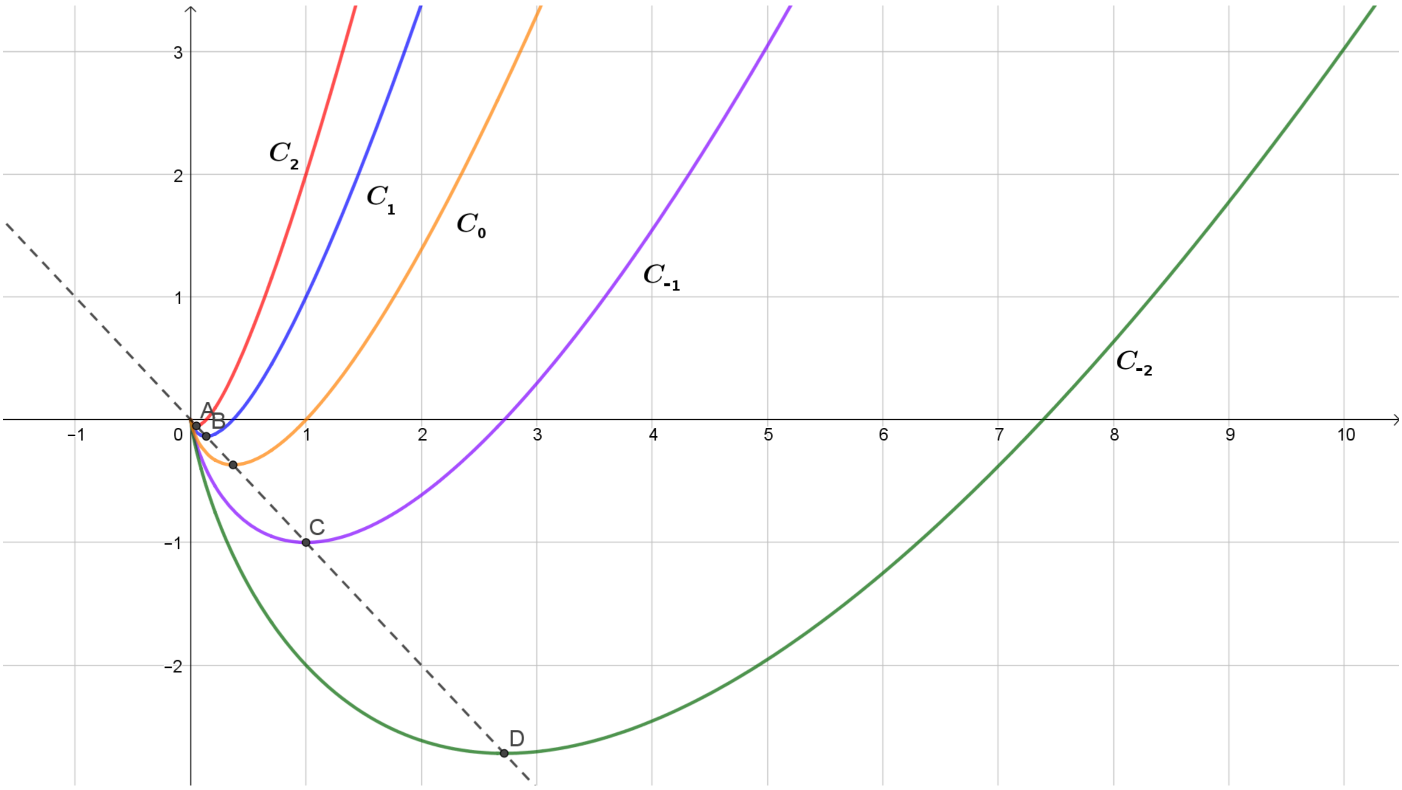
| $x$ | $0$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $A(x)$ | | $\nearrow$ | $\dfrac{1}{e}$ | $\searrow$ | |

L'aire maximale est $\dfrac{1}{e}$ avec AB = $e$ et BC = $\dfrac{1}{e^2}$.

**Exercice 3 :**

*Soit $f_k$ la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f_k(x) = x\ln x + kx$ pour tout $k$ réel et $C_k$ sa courbe représentative.*

*En quel réel $x_k$ la fonction $f_k$ admet-elle un minimum ? Quelle est alors la courbe décrite par le point $M_k$ de $C_k$ d'abscisse $x_k$ ?*




Le minimum d'une fonction est déterminé par l'étude de la dérivée.

La fonction $f_k$ est dérivable sur $[0;+\infty[$ en tant que composée de fonctions logarithme et polynomiale :

$\forall x \in [0;+\infty[,\ \ f_k'(x) = 1\times \ln x + x \times \frac{1}{x} + k = \ln x + 1 + k$.

$f_k'(x) > 0 \ \Leftrightarrow\ \ln x + 1 + k > 0 \ \Leftrightarrow\ \ln x > -1-k \ \Leftrightarrow\ x > e^{-1-k}$

| $x$ | $0$ | | $e^{-1-k}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_k'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f_k$ | | $\searrow$ | $-e^{-1-k}$ | $\nearrow$ | |

$f_k\left(e^{-1-k}\right) = e^{-1-k} \times \ln\left(e^{-1-k}\right) + k\left(e^{-1-k}\right) = e^{-1-k}\times(-1-k) + k\left(e^{-1-k}\right) = -e^{-1-k}$.

Ainsi le minimum $M_k$ de chaque fonction $f_k$ a pour coordonnées : $M_k\left(e^{-1-k};-e^{-1-k}\right)$, soit $y_k = -x_k$.

Tous les points $M_k$ sont une droite d'équation $y = -x$.

**Exercice 4 :** *Classer par ordre croissant :* $a = 2016^{2018}$, $b = 2017^{2017}$ *et* $c = 2018^{2016}$

Comparer $a = 2016^{2018}$ et $b = 2017^{2017}$ *revient à comparer* $\ln\left(2016^{2018}\right)$ et $\ln\left(2017^{2017}\right)$ car la fonction logarithme est strictement croissante., ce qui revient à comparer $2018\ln 2016$ et $2017\ln 2017$.

Pour $x > 1$, on pose la fonction $f(x) = (x+1)\ln(x-1) - x\ln x$

La fonction $f$ est dérivable en tant que composée de fonctions logarithme et polynomiale : $\forall x>1$,

$$f'(x)=1\times\ln(x-1)+(x+1)\times\frac{1}{x-1}-\left(1\times\ln x+x\times\frac{1}{x}\right)=\ln(x-1)+\frac{x+1}{x-1}-\ln x-1=\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)+\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x-1}$$

$$=\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)+\frac{x+1-(x-1)}{x-1}=\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)+\frac{2}{x-1}$$

On voit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$. On utilise désormais la forme $f'(x)=\ln(x-1)-\ln x+\frac{2}{x-1}$.

La fonction $f'$ est dérivable en tant que composée de fonctions logarithme et polynomiale : $\forall x>1$,

$$f''(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}-\frac{2}{(x-1)^2}=\frac{x(x-1)-(x-1)^2-2x}{x(x-1)^2}=\frac{x^2-x-x^2+2x-1-2x}{x(x-1)^2}=\frac{-x-1}{x(x-1)^2}$$

$\forall x>1$ : $x(x-1)^2>0$.

$-x-1>0 \iff -x>1 \iff x<-1$

Donc le numérateur est négatif pour tout $x>1$ et la dérivée première $f'$ est décroissante avec $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$

Ainsi $\forall x>1$ : $f'(x)>0$ et la fonction $f$ est strictement croissante sur $]1;+\infty[$ et s'annule pour $\alpha\simeq 4$.

Donc si $x>\alpha$ : $f(x)>0$ et $(x+1)\ln(x-1)>x\ln x$ et $2016^{2018}>2017^{2017}$.

## Exercice 5 :

*Soit n un entier strictement positif.*

*Soit la fonction $f_n$ définie sur l'ensemble des nombres réels par :* $f_n(x)=2ne^x-e^{2x}$

*et $C_n$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.*

*On admet que $f_n$ est dérivable et que $C_n$ admet une tangente horizontale en un unique point $S_n$.*

*Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.*

*VRAI ou FAUX : Pour tout entier strictement positif n, l'ordonnée du point $S_n$ est $n^2$.*

La pente de la tangente est égale à la valeur de la dérivée.
Une tangente horizontale est associée à une dérivée nulle.
La fonction *f* est dérivable en tant que différence de fonctions exponentielles.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f_n'(x)=2ne^x-2e^{2x}=2\left(ne^x-e^{2x}\right)=2\left(ne^x-e^x\times e^x\right)=2e^x\left(n-e^x\right)$

L'exponentielle étant strictement positive, on a :

$$f_n'(x)=0 \iff n-e^x=0 \iff e^x=n \iff x=\ln(n).$$

L'abscisse du point admettant une tangente horizontale est $\ln(n)$.

Son ordonnée est :

$$f_n(\ln(n))=2ne^{\ln(n)}-e^{2\times\ln(n)}=2n\times n-e^{\ln\left(n^2\right)}=2n^2-n^2=n^2$$

La proposition est vraie.

## Exercice 6 :

*Résoudre l'équation :* $16^x+20^x=25^x$

$$\left(4^2\right)^x+(4\times5)^x=\left(5^2\right)^x$$

$$\iff \left(4^x\right)^2+4^x\times5^x=\left(5^x\right)^2$$

$$\iff \frac{\left(4^x\right)^2+4^x\times5^x}{\left(4^x\right)^2}=\frac{\left(5^x\right)^2}{\left(4^x\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow\ 1+\frac{5^x}{4^x}=\left(\frac{5^x}{4^x}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\ \left(\frac{5^x}{4^x}\right)^2-\left(\frac{5^x}{4^x}\right)-1=0$$

On pose $X=\frac{5^x}{4^x}$, ainsi :

$$X^2-X-1=0$$

Discriminant :

$$\Delta=(-1)^2-4\times1\times(-1)=5$$

Deux solutions :

$$X_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\quad\text{et}\quad X_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Ainsi :

$$\left(\frac{5}{4}\right)^x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\quad\text{ou}\quad\left(\frac{5}{4}\right)^x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Or $\left(\frac{5}{4}\right)^x$ est positif, donc on ne peut retenir la première solution dans une étude réelle.

Ainsi :

$$\ln\left[\left(\frac{5}{4}\right)^x\right]=\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ x\times\ln 1,25=\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ x=\frac{\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\ln 1,25}$$

La Merci MONTPELLIER

**Exercice 7** *Trouver l'ensemble des couples entiers $(x;y)$ solutions de l'équation : $x^y=y^x$.*

Si $x$ et $y$ sont premiers entre eux, il n'y a pas de solution.

Si $x=y$, l'équation est toujours vérifiée, il n'y a une infinité de solution : les couples entiers $(x;x)$.

Si $x$ est un multiple de $y$ : soit $k\in\mathbb{N}-\{0;1\}$ tel que :

$$y=k\times x.$$

Ainsi :

$$x^{kx}=(kx)^x$$

$$\Leftrightarrow\ \left(x^k\right)^x=(kx)^x$$

$$\Leftrightarrow\ x^k=kx$$

$$\Leftrightarrow\ x^{k-1}=k$$

$$\Leftrightarrow\ x=k^{\frac{1}{k-1}}$$

D'où :

$$y=k\times x=k\times k^{\frac{1}{k-1}}=k^{1+\frac{1}{k-1}}=k^{\frac{k-1}{k-1}+\frac{1}{k-1}}=k^{\frac{k}{k-1}}$$

Quelques essais :

Pour $k=2$ :

$$x=2^{\frac{1}{2-1}}=2^1=2 \quad \text{et} \quad y=2^{\frac{2}{2-1}}=2^2=4$$

$$\rightarrow \quad x^y=2^4=16 \quad \text{et} \quad y^x=4^2=16$$

donc $2^4=4^2$

Pour $k=3$ :

$$x=3^{\frac{1}{3-1}}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3} \quad \text{et} \quad y=3^{\frac{3}{3-1}}=3^{\frac{3}{2}}=3\times 3^{\frac{1}{2}}=3\sqrt{3}$$

Il semble que pour $k>2$, il n'y ait pas de solution entière.

En effet, d'abord à partir d'un exemple :

$$32=2^5 \quad \text{donc} \quad 32^{\frac{1}{5}}=2 \quad \text{et} \quad 32^{\frac{1}{31}}$$ ne peut pas être un entier.

En généralisant, pour tout entier $k>2$ :

$k^{\frac{1}{k-1}}$ ne peut pas être un nombre entier.

Si $x$ et $y$ ne sont pas premiers entre eux

Soit $k\geq 2$ leur plus grand diviseur commun : il existe deux entiers naturels $a$ et $b$, premiers entre eux si $a>1$, tels que $a<b$ et :

$$x=k\times a \quad \text{et} \quad y=k\times b.$$

Ainsi : $(ka)^{kb}=(kb)^{ka}$

$$\Leftrightarrow \left((ka)^b\right)^k=\left((kb)^a\right)^k$$

$$\Leftrightarrow (ka)^b=(kb)^a$$

$$\Leftrightarrow k^b\times a^b=k^a\times b^a$$

$$\Leftrightarrow k^{b-a}\times a^b=b^a$$

Or si $a>1$, alors $a$ et $b$ sont premiers entre eux, donc l'égalité ci-dessus ne peut se réaliser.

Si $a=1$, la relation devient :

$$k^{b-1}\times 1^b=b^1$$

$\Leftrightarrow k^{b-1}=b$ $\quad$ $k$ est un diviseur de $b$ : $k\leq b$.

Or $b>a$ donc $b>1 \Leftrightarrow b-1>0$

$\rightarrow$soit $b=2$, ce qui implique $k=2$ car $2^{2-1}=2$

$\rightarrow$soit $b>2$ : pour tout entier $k\geq 2$ : $k^{b-1}>b$ : il n'y a pas de solution.

Les solutions $a=1$, $b=2$ et $k=2$ donnent :

$$x=k\times a=2$$
$$y=k\times b=4$$

## Exercice 8 : BAC Guyane – Sept 2014

*On considère l'équation* $(E_1): e^x-x^n=0$ *où x est un réel strictement positif et* $n\in\mathbb{N}^*$.

**1.** *Montrer que l'équation* $(E_1)$ *est équivalente à l'équation* $(E_2): \ln(x)-\frac{x}{n}=0$.

$$(E_1): e^x-x^n=0$$

$$\Leftrightarrow e^x=x^n$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{x}\right)=\ln\left(x^{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow x=n\times\ln x$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{n}=\ln x$$

soit : $\left(E_2\right):\ln(x)-\frac{x}{n}=0$

**2.** *Pour quelles valeurs de $n$ l'équation $\left(E_1\right)$ admet-elle deux solutions ?*

Soit $f$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\ln(x)-\frac{x}{n}$.

$f$ est dérivable en tant que différence de fonction logarithmique et polynomiale.

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{n}=\frac{n-x}{n\times x}.$$

La dérivée est positive si :

$$n-x>0 \Leftrightarrow n>x$$

Si $x\in]0;n[$ : $f'(x)>0$

Si $x\in]n;+\infty[$ : $f'(x)<0$

| $x$ | $0$ | | $n$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\ln(n)-1$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

$$\lim_{x\to 0}\ln(x)-\frac{x}{n}=-\infty \quad , \quad f(n)=\ln(n)-1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\ln(x)-\frac{x}{n}=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\ln(x)}{x}-\frac{1}{n}\right)$$ or par croissances comparées : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$

donc $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}-\frac{x}{n}=-\infty$ , $n$ étant une constante.

L'équation $\left(E_2\right):\ln(x)-\frac{x}{n}=0$ n'a donc de solution que si le maximum de la fonction $f$ est strictement positif, en vertu du T.V.I. :

$$\ln(n)-1>0$$

$$\Leftrightarrow \ln(n)>1$$

$$\Leftrightarrow n>e$$

Les équations $\left(E_1\right)$ et $\left(E_2\right)$ étant équivalentes et $n\in\mathbb{N}^{*}$, l'équation $\left(E_1\right)$ admet deux solutions si :

$$n\geq 3$$

**Exercice 9 :** *Résoudre l'équation :* $\frac{3^{x}}{4^{x}}=\frac{5}{2^{x}}$

$$\frac{3^{x}}{4^{x}}=\frac{5}{2^{x}} \Leftrightarrow \frac{3^{x}}{2^{x}\times2^{x}}=\frac{5}{2^{x}} \Leftrightarrow \frac{3^{x}\times2^{x}}{2^{x}\times2^{x}}=5 \Leftrightarrow \frac{3^{x}}{2^{x}}=5 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x}=5$$

$$\Leftrightarrow x\times\ln\left(\frac{3}{2}\right)=\ln 5 \Leftrightarrow x=\frac{\ln 5}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \times \ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\ln 5}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}$$

## Exercice 10 :

*Résoudre les équations :* $x^{\ln x} = 2$ , $x \ln x = 2$ *et* $x^{\ln x} = x \ln x$

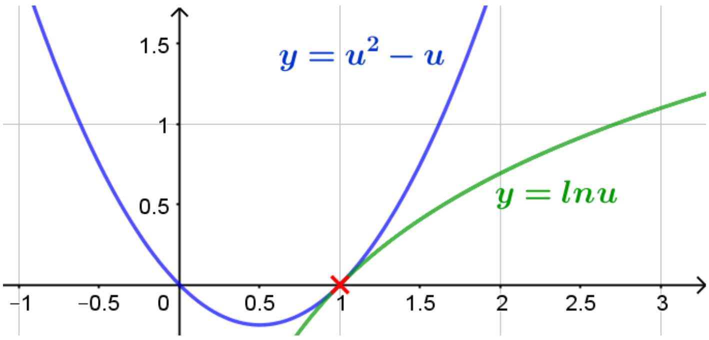
$$x^{\ln x} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(x^{\ln x}\right) = \ln 2$$
$$\Leftrightarrow \quad \ln x \times \ln x = \ln 2$$
$$\Leftrightarrow \quad \ln x \times \ln x = \ln 2$$
$$\Leftrightarrow \quad \ln x = \pm\sqrt{\ln 2}$$
$$\Leftrightarrow \quad x = e^{\sqrt{\ln 2}} \simeq 2,29918 \quad \text{ou} \quad \Leftrightarrow \quad x = e^{-\sqrt{\ln 2}} \simeq 0,43494$$

$$x \ln x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad e^{\ln x} \times \ln x = 2$$ →c'est une fonction de Lambert
$$\Leftrightarrow \quad W\left(\ln x \times e^{\ln x}\right) = W(2)$$
$$\Leftrightarrow \quad \ln x = W(2)$$
$$\Leftrightarrow \quad x = e^{W(2)} \simeq 2,3451$$

$$x^{\ln x} = x \ln x \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(x^{\ln x}\right) = \ln(x \ln x)$$
$$\Leftrightarrow \quad \ln x \times \ln x = \ln x + \ln(\ln x)$$
$$\Leftrightarrow \quad (\ln x)^2 - \ln x = \ln(\ln x)$$

On pose : $u = \ln x$ :
$$\Leftrightarrow \quad u^2 - u = \ln(u)$$

Résolution graphique :




On obtient : $u = 1$, soit :
$$\ln x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = e \simeq 2,71828$$

## Exercice 11 :

*Résoudre les équations :* $x^{x^3} = 2$ *et* $x^{x^3} = 3$

$$x^{x^3} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(x^{x^3}\right) = \ln 2$$
$$\Leftrightarrow \quad x^3 \ln x = \ln 2$$
$$\Leftrightarrow \quad e^{3\ln x} \times \ln x = \ln 2$$
$$\Leftrightarrow \quad 3\ln x \times e^{3\ln x} = 3\ln 2$$ →avec la fonction de Lambert vérifiant : $W\left(ue^u\right) = u$
$$\Leftrightarrow \quad 3\ln x = W(3\ln 2)$$

$$\Leftrightarrow \quad x = e^{\frac{1}{3}W(3\ln 2)}$$

$$x^{x^3} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = e^{\frac{1}{3}W(3\ln 3)} = \sqrt[3]{3}$$

NB : $x^{x^3} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x^{x^3}\right)^3 = 3^3 \quad \Leftrightarrow \quad x^{3x^3} = 3^3 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x^3\right)^{x^3} = 3^3$

→ceci implique : $x^3 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{3}$