Exercice à prise d'initiative : suites et exponentielle

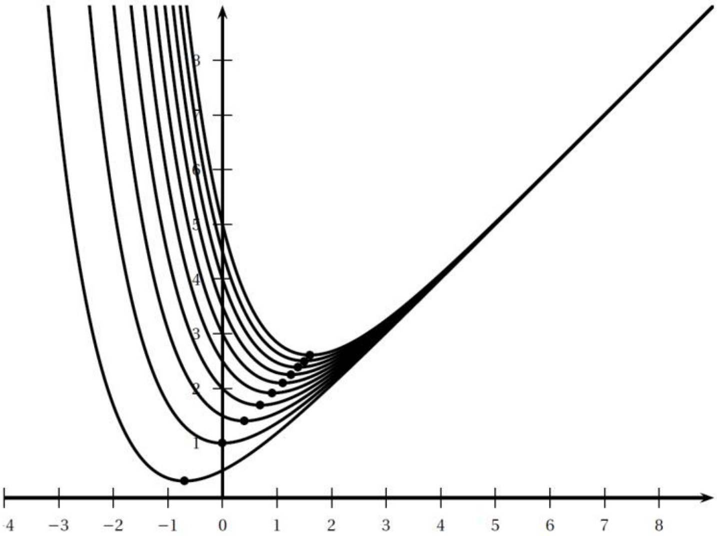
Exercice 1 : Liban 2017

Soit k un réel strictement positif. On considère les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = x + ke^{-x}.$$

On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan muni d'un repère orthonormé.

On a représenté ci-dessous quelques courbes C_k pour différentes valeurs de k.



Pour tout réel k strictement positif, la fonction f_k admet un minimum sur $\mathbb{R}$. La valeur en laquelle ce minimum est atteint est l'abscisse du point noté A_k de la courbe C_k . il semblerait que, pour tout réel k strictement positif, les points A_k soient alignés.

Est-ce le cas ?

Exercice 2 :

Trouver l'aire du cercle de centre l'origine $(0;0)$ et inscrit entre les deux courbes d'équations :

$$y = e^{-x^2}$$

et $$y = -e^{-x^2}$$

Exercice 3 :

Etudier et représenter la fonction $x \mapsto x^x$.

Exercice 4 :

Pour chaque réel a, on considère la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(x) = e^{x-a} - 2x + e^a.$$

1) Montrer que pour tout réel a, la fonction possède un minimum.
2) Existe-t-il une valeur de a pour laquelle ce minimum est le plus petit possible ?

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 1

Les fonctions f_k sont dérivables en tant que composées de fonctions exponentielle et polynomiales.

$\forall x \in \mathbb{R}$: $\qquad f_k'(x) = 1 - ke^{-x}$.

Etude : $\qquad f_k'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - ke^{-x} > 0 \Leftrightarrow -ke^{-x} > -1 \Leftrightarrow ke^{-x} < 1 \Leftrightarrow e^{-x} < \dfrac{1}{k}$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{-x}\right) < \ln\left(\frac{1}{k}\right) \Leftrightarrow -x < -\ln k \Leftrightarrow -x \times (-1) > -\ln(k) \times (-1) \Leftrightarrow x > \ln k$$

Ainsi : $\qquad$ si $x > \ln k$, alors : $f_k'(x) > 0$

$\qquad\qquad$ si $x < \ln k$, alors : $f_k'(x) < 0$.

Les coordonnées de chaque point A_k , minimum de chaque courbe C_k sont données par :

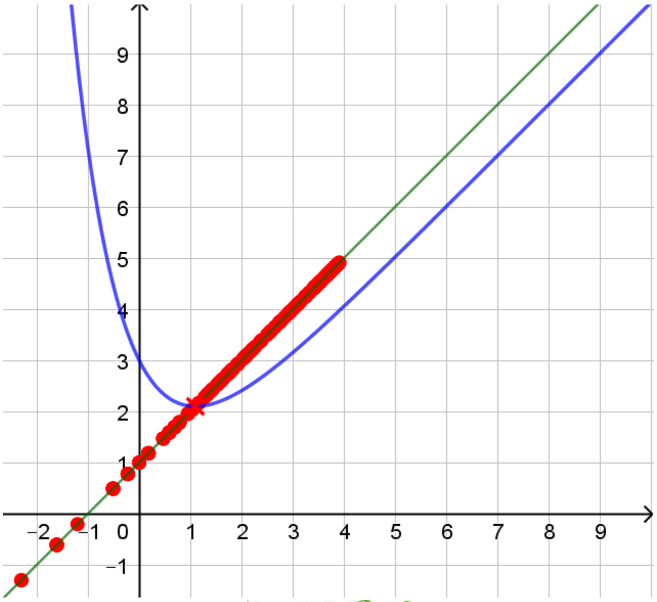
$$f_k(\ln k) = \ln k + ke^{-\ln k} = \ln k + ke^{\ln\frac{1}{k}} = \ln k + k \times \frac{1}{k} = \ln k + 1$$

Ainsi : $\qquad A_k(\ln k ; \ln k + 1)$

On remarque que pour chaque point A_k, $y_k = x_k + 1$.

Donc tous les sommets sont alignés et se trouvent sur la droite d'équation :

$$y = x + 1$$



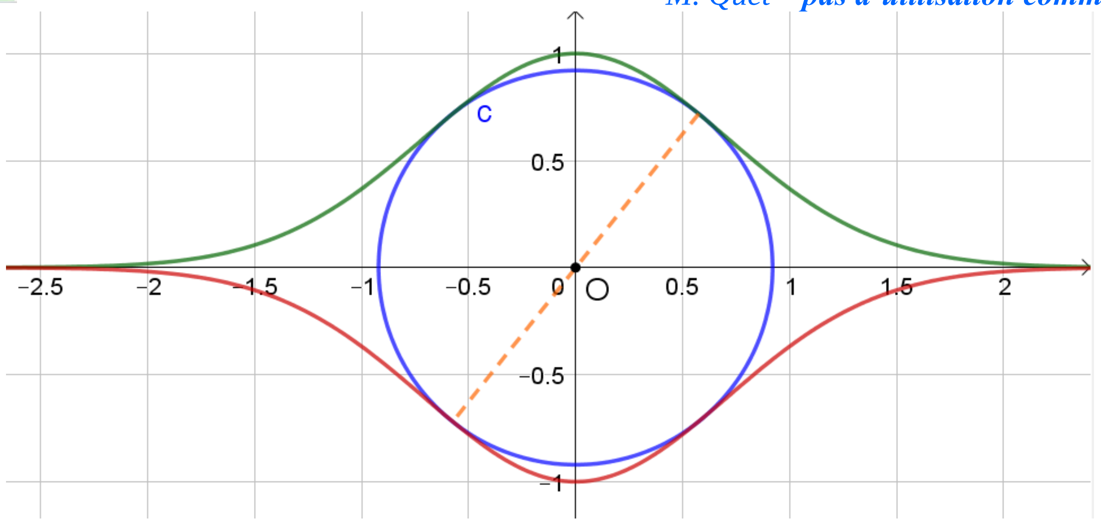
Exercice 2 :

Trouver l'aire du cercle de centre l'origine $(0;0)$ *et inscrit entre les deux courbes d'équations :*

$$y = e^{-x^2}$$

et $\qquad y = -e^{-x^2}$

La problématique est la suivante : il faut trouver l'aire du disque ci-dessous :



L'équation du cercle est :

$$x^2+y^2=r^2 \quad \Leftrightarrow \quad y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$$

Ce cercle vérifie deux contraintes :

- Si $y\geq 0$: le demi-cercle d'équation $y=\sqrt{r^2-x^2}$ est au-dessous de la courbe d'équation : $y=e^{-x^2}$, ainsi :
$$e^{-x^2}-\sqrt{r^2-x^2}\geq 0$$
- Si $y<0$: le demi-cercle d'équation $y=-\sqrt{r^2-x^2}$ est au-dessus de la courbe d'équation : $y=-e^{-x^2}$, ainsi :
$$-\sqrt{r^2-x^2}-\left(-e^{-x^2}\right)\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\sqrt{r^2-x^2}+e^{-x^2}\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-x^2}-\sqrt{r^2-x^2}\geq 0$$

On peut également considérer que l'on recherche la plus petite distance entre deux points de chacune des courbes symétriques par rapport à l'origine (car tous les autres cercles coupent les courbes) :

→entre un point de coordonnées $\left(x;e^{-x^2}\right)$ et un autre de coordonnées $\left(-x;-e^{-x^2}\right)$

→le carré de la distance entre ces deux points est :

$$\left(x-(-x)\right)^2+\left(e^{-x^2}-\left(-e^{-x^2}\right)\right)^2=(2x)^2+\left(2e^{-x^2}\right)^2=4\left(x^2+e^{-2x^2}\right)$$

Nous recherchons la plus grande distance possible, la dérivée de cette expression est :

$$4\left(2x-4xe^{-2x^2}\right)=8x\left(1-2e^{-2x^2}\right).$$

Pour simplifier l'étude, cherchons une solution telle que $x>0$: la parenthèse s'étudie comme suit :

$$\begin{aligned}1-2e^{-2x^2}>0 &\Leftrightarrow -2e^{-2x^2}>-1\\ &\Leftrightarrow e^{-2x^2}<\frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow \ln\left(e^{-2x^2}\right)<\ln\left(\frac{1}{2}\right)\\ &\Leftrightarrow -2x^2<-\ln 2\\ &\Leftrightarrow x^2>\frac{1}{2}\ln 2\\ &\Leftrightarrow x^2>\ln\sqrt{2}\end{aligned}$$

Le carré de la distance entre ces deux points est donné par l'expression $4\left(x^2+e^{-2x^2}\right)$, donc l'expression de la distance est :

$$f(x)=\sqrt{4\left(x^2+e^{-2x^2}\right)}=2\sqrt{x^2+e^{-2x^2}}$$

Sur l'intervalle $[0;+\infty[$, on obtient le tableau de variation de la fonction f :

x	0		$\sqrt{\ln\sqrt{2}}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	2	$\searrow$	$f\left(\sqrt{\ln\sqrt{2}}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f\left(\sqrt{\ln\sqrt{2}}\right)=2\sqrt{\left(\sqrt{\ln\sqrt{2}}\right)^2+e^{-2\left(\sqrt{\ln\sqrt{2}}\right)^2}}$$
$$=2\sqrt{\ln\sqrt{2}+e^{-2\ln\sqrt{2}}}$$
$$=2\sqrt{\ln\sqrt{2}+e^{-\ln\left(\sqrt{2}\right)^2}}$$
$$=2\sqrt{\ln\sqrt{2}+e^{-\ln 2}}$$
$$=2\sqrt{\ln\sqrt{2}+e^{\ln\frac{1}{2}}}$$
$$=2\sqrt{\ln\sqrt{2}+\frac{1}{2}}$$

Cette distance minimale correspond au diamètre du disque cherché, donc son rayon mesure :

$$\sqrt{\ln\sqrt{2}+\frac{1}{2}}$$

Et son aire mesure : $\pi\left(\ln\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)$.

Exercice 3 :

Etudier et représenter la fonction $x\mapsto x^x$.

Pour tout réel x strictement positif, on définit la fonction f par :

$f(x)=x^x$.

Il est aujourd'hui admis que :

$$0^0=1$$

Cette fonction peut aussi s'écrire, pour tout réel x strictement positif :

$$f(x)=e^{x\ln x}$$

Cette fonction est dérivable en tant exponentielle d'un produit de fonctions polynômiale et logarithmique :

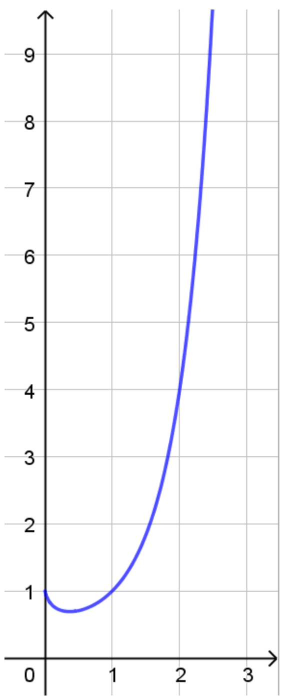
$$f'(x)=\left(1\times\ln x+x\times\frac{1}{x}\right)e^{x\ln x}=(\ln x+1)e^{x\ln x}.$$

Une exponentielle étant strictement positive, on obtient :

$$f'(x)>0 \iff \ln x+1>0 \iff \ln x>-1 \iff x>e^{-1}$$

Si $x\in\left]0;e^{-1}\right[$: $f'(x)<0$ et la fonction f est strictement décroissante ;

Si $x\in\left]e^{-1};+\infty\right[$: $f'(x)>0$ et la fonction f est strictement croissante.



Exercice 4 :

Pour chaque réel a, on considère la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(x) = e^{x-a} - 2x + e^a.$$

1) *Montrer que pour tout réel a, la fonction possède un minimum.*

La dérivée de la fonction f_a est :

$$f_a'(x) = e^{x-a} - 2$$

Etude du signe :

$$f_a'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{x-a} - 2 > 0 \Leftrightarrow e^{x-a} > 2 \Leftrightarrow x - a > \ln 2 \Leftrightarrow x > a + \ln 2$$

Ainsi :

si $x < a + \ln 2$: $f_a'(x) < 0$ et la fonction f_a est strictement décroissante,

si $x > a + \ln 2$: $f_a'(x) > 0$ et la fonction f_a est strictement croissante.

Toute fonction f_a admet un minimum au point d'abscisse $a + \ln 2$.

2) *Existe-t-il une valeur de a pour laquelle ce minimum est le plus petit possible ?*

Le minimum de chaque fonction f_a est :

$$f_a(a + \ln 2) = e^{a+\ln 2 - a} - 2(a + \ln 2) + e^a = 2 - 2a + \ln 2 + e^a$$

On considère une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^x - 2x + 2 + \ln 2$$

$$g'(x) = e^x - 2$$

Ainsi : $g'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > 2 \Leftrightarrow x > \ln 2$

si $x < \ln 2$: $g'(x) < 0$ et la fonction g est strictement décroissante,

si $x > \ln 2$: $g'(x) > 0$ et la fonction g est strictement croissante.

Le plus petit des minimum des fonctions f_a est obtenu pour $a = \ln 2$.