Contrôle sur les logarithmes

L'invention des logarithmes en réduisant le temps passé au calcul de quelques mois à quelques jours, double ainsi dire la vie des astronomes. Pierre Simon de Laplace (1749-1827)

Exercice :

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$.

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;1]$ par

$$f(x) = x(1-\ln x)^2.$$

   a. Déterminer une expression de la fonction dérivée de f et vérifier que pour tout $x \in]0;1]$,

$$f'(x) = (\ln x + 1)(\ln x - 1).$$

   b. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations sur l'intervalle $]0;1]$ (on admettra que la limite de la fonction f en 0 est nulle).

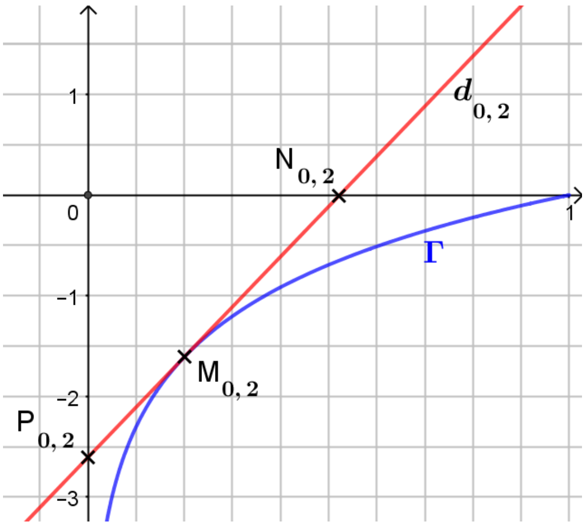
On note Γ la courbe représentative de la fonction g définie sur l'intervalle $]0;1]$ par

$$g(x) = \ln x.$$

Soit a un réel de l'intervalle $]0;1]$. On note M_a le point de la courbe Γ d'abscisse a et da la tangente à la courbe Γ au point M_a. Cette droite d_a coupe l'axe des abscisses au point N_a et l'axe des ordonnées au point P_a.

On s'intéresse à l'aire du triangle $\mathrm{ON}_a\mathrm{P}_a$ quand le réel a varie dans l'intervalle $]0;1]$.

2. Dans cette question, on étudie le cas particulier où $a = 0,2$ et on donne la figure ci-dessous.



   a. Déterminer graphiquement une estimation de l'aire du triangle $\mathrm{ON}_{0,2}\mathrm{P}_{0,2}$ en unités d'aire.

   b. Déterminer une équation de la tangente $d_{0,2}$.

   c. Calculer la valeur exacte de l'aire du triangle $\mathrm{ON}_{0,2}\mathrm{P}_{0,2}$.

Dans ce qui suit, on admet que, pour tout réel x de l'intervalle $]0;1]$, l'aire du triangle $\mathrm{ON}_x\mathrm{P}_x$ en unités d'aire est donnée par $A(x) = \dfrac{1}{2}x(1-\ln x)^2$.

3. À l'aide des questions précédentes, déterminer pour quelle valeur de x l'aire $A(x)$ est maximale. Déterminer cette aire maximale.

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice :

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$.

1. *On considère la fonction* f *définie sur l'intervalle* $]0;1]$ *par*

$$f(x) = x(1-\ln x)^2.$$

a. *Déterminer une expression de la fonction dérivée de* f *et vérifier que pour tout* $x \in]0;1]$,

$$f'(x) = (\ln x + 1)(\ln x - 1).$$

On pose $\quad u(x) = x$ et $v(x) = (1-\ln x)^2$

Donc : $\quad u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2\times(1-\ln x)\times\left(-\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{2(1-\ln x)}{x}$

Ainsi :
$$\begin{aligned}
f'(x) &= 1\times(1-\ln x)^2 + x\times\left[-\frac{2(1-\ln x)}{x}\right]\\
&= (1-\ln x)^2 - 2(1-\ln x)\\
&= (1-\ln x)\left[(1-\ln x)-2\right]\\
&= (1-\ln x)(-1-\ln x)\\
&= (-1)\times(\ln x+1)\times(-1)\times(\ln x-1)\\
&= (\ln x+1)(\ln x-1)
\end{aligned}$$

b. *Étudier les variations de la fonction* f *et dresser son tableau de variations sur l'intervalle* $]0;1]$ *(on admettra que la limite de la fonction* f *en 0 est nulle).*

Pour tout $x \in]0;1]$:

$$\ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1}$$
$$\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow x > e^{1}$$

Or $e \notin]0;1]$ donc pour tout $x \in]0;1]$: $\ln x - 1 < 0$

Ainsi : si $x \in]0;e[$: $f'(x) > 0$ et la fonction f est croissante ;

si $x \in]e;1]$: $f'(x) < 0$ et la fonction f est décroissante.

x	0		e^{-1}		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$4e^{-1}$	$\searrow$	1

$f(1) = 1\times(1-\ln 1)^2 = 1$ et $f\left(e^{-1}\right) = e^{-1}\times\left(1-\ln e^{-1}\right)^2 = e^{-1}\times(1-(-1))^2 = 4e^{-1}$

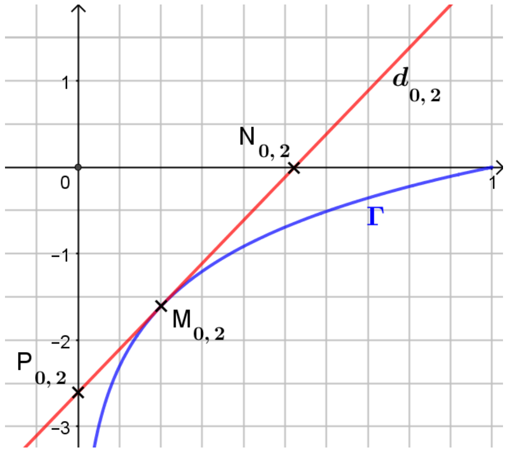
On note Γ la courbe représentative de la fonction g définie sur l'intervalle $]0;1]$ *par*

$$g(x) = \ln x.$$

Soit a un réel de l'intervalle $]0;1]$. *On note* M_a *le point de la courbe Γ d'abscisse a et* d_a *la tangente à la courbe Γ au point* M_a. *Cette droite* d_a *coupe l'axe des abscisses au point* N_a *et l'axe des ordonnées au point* P_a.

On s'intéresse à l'aire du triangle $\mathrm{ON}_a\mathrm{P}_a$ *quand le réel a varie dans l'intervalle* $]0;1]$.

2. *Dans cette question, on étudie le cas particulier où* $a = 0,2$ *et on donne la figure ci-dessous.*



a. *Déterminer graphiquement une estimation de l'aire du triangle* $ON_{0,2}P_{0,2}$ *en unités d'aire.*

$$ON_{0,2} \simeq 0{,}52 \quad \text{et} \quad OP_{0,2} \simeq 2{,}6$$

Donc : $$\mathcal{A}_{ON_{0,2}P_{0,2}} \simeq \frac{ON_{0,2} \times P_{0,2}}{2} \simeq \frac{0{,}52 \times 2{,}6}{2} \simeq 0{,}676 \text{ } u.a.$$

b. *Déterminer une équation de la tangente* $d_{0,2}$.

Il s'agit de définir l'équation de la tangente à la courbe représentant la fonction g définie par $g(x) = \ln x$ au point d'abscisse 0,2 :

$$y = g'(0{,}2) \times (x - 0{,}2) + g(0{,}2)$$

Or : $$g'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{donc :} \quad g'(0{,}2) = \frac{1}{0{,}2} = 5$$

Et : $$g(0{,}2) = \ln 0{,}2 = \ln \frac{1}{5} = -\ln 5$$

Ainsi : $$y = 5(x - 0{,}2) - \ln 5 = 5x - 1 - \ln 5$$

c. *Calculer la valeur exacte de l'aire du triangle* $ON_{0,2}P_{0,2}$.

L'équation de la tangente nous permet de définir les coordonnées exactes des points $N_{0,2}$ et $P_{0,2}$

Pour $N_{0,2}$: si $y = 0$, alors : $5x - 1 - \ln 5 = 0 \Leftrightarrow 5x = 1 + \ln 5 \Leftrightarrow x = \frac{1 + \ln 5}{5} \rightarrow \left(\frac{1 + \ln 5}{5} ; 0\right)$

Pour $P_{0,2}$: si $x = 0$, alors : $y = 5 \times 0 - 1 - \ln 5 = -1 - \ln 5 \rightarrow (0 ; -1 - \ln 5)$

L'aire exacte du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$ est :

$$\mathcal{A}_{ON_{0,2}P_{0,2}} = \frac{ON_{0,2} \times P_{0,2}}{2} = \frac{\left(\frac{1 + \ln 5}{5}\right) \times |-1 - \ln 5|}{2} = \frac{1 + \ln 5}{10} \times (1 + \ln 5) = \frac{(1 + \ln 5)^2}{10} \text{ } u.a.$$

Dans ce qui suit, on admet que, pour tout réel x *de l'intervalle* $]0;1]$, *l'aire du triangle* ON_xP_x *en unités d'aire est donnée par* $A(x) = \frac{1}{2} x (1 - \ln x)^2$.

3. *À l'aide des questions précédentes, déterminer pour quelle valeur de* x *l'aire* $A(x)$ *est maximale. Déterminer cette aire maximale.*

On remarque que : $A(x) = \frac{1}{2} f(x)$, ces deux fonctions ont le même maximum en e^{-1}.

L'aire maximale est :

$$A(e^{-1}) = \frac{1}{2} f(e^{-1}) = \frac{4e^{-1}}{2} = 2e^{-1}$$