Contrôle sur les logarithmes

Quand vous ne savez que faire, que faites-vous ?
« Apprendre, c'est comme s'éveiller d'un songe ». Johannes Képler

Exercice 1 : / 1 pt

Simplifier les expressions suivantes

$$A = \ln\left(\frac{2x}{3}\right) + \ln(3e) - \ln\left(\frac{4x}{5}\right) \qquad B = \ln\left(7^5\right) - \ln(7e) - 3\ln\left(e^4\right)$$

Exercice 2 : / 2 pts

Déterminer le domaine de définition des fonctions ci-dessous.

$$f(x) = \ln\left(6x^2 - 30x + 36\right) \qquad g(x) = \frac{\ln(x+3)}{5 + 3\ln x}$$

Exercice 3 : / 4 pts

Résoudre l'équation puis l'inéquation suivantes.

$$\ln(3x-2) = \ln(5-2x) \qquad \ln(x+1) \geq \ln\left(x^2 - 4x + 3\right)$$

Exercice 4 : / 2 pts

Dériver les fonctions dérivables suivantes :

$$h(x) = \ln\left(4 - 9x^2\right) \qquad i(x) = \frac{\ln(3+2x)}{2x+9}$$

Exercice 5 : / 2 pts

Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse $x_0 = e$ de la représentation graphique de la fonction

$$j(x) = \frac{1 + \ln x}{2 + \ln x}$$

Exercice 6 : / 2 pts

Résoudre l'équation : $-3\ln^2 x + 7\ln x - 4 = 0$

Exercice 7 : / 2 pts

Déterminer les limites suivantes (en utilisant des changements de variable) :

$$\lim_{x \to 0} \ln\left(4 - 4e^{2x}\right) \qquad \lim_{x \to -\infty} x + \ln\left(1 + e^{-x}\right)$$

Exercice 8 : / 2 pts

On place une somme d'argent X à un taux annuel de 7% toutes taxes comprises.
Dans combien d'années ce capital aura-t-il doublé ? Proposer un algorithme simple de résolution.

Exercice 9 : / 3 pts

Soit f_k la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f_k(x) = x\ln x + kx$ pour tout k réel et C_k sa courbe représentative.
En quel réel x_k la fonction f_k admet-elle un minimum ? Quelle est alors la courbe décrite par le point M_k de C_k d'abscisse x_k ?

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 1 :
/ 1 pt

$$A=\ln\left(\frac{2x}{3}\right)+\ln(3e)-\ln\left(\frac{4x}{5}\right)=\ln(2x)-\ln 3+\ln 3+\ln e-\ln(4x)+\ln 5$$
$$=\ln 2+\ln x+\ln e-\ln 4-\ln x+\ln 5=\ln 2+1-2\ln 2+\ln 5=1+\ln 5-\ln 2$$
$$B=\ln\left(7^5\right)-\ln(7e)-3\ln\left(e^4\right)=5\ln 7-\ln 7-\ln e-12\ln e=4\ln 7-13$$

Exercice 2 :
/ 2 pts

$$f(x)=\ln\left(6x^2-30x+36\right)=\ln\left(6\left(x^2-5x+6\right)\right)=\ln 6+\ln\left(x^2-5x+6\right)$$

→ $\Delta=(-5)^2-4\times1\times6=25-24=1$: deux solutions : $x_1=\dfrac{5-1}{2}=2$ et $x_2=\dfrac{5+1}{2}=3$

→le polynôme est du signe de a à l'extérieur des racines donc $D_f=]-\infty;2[\cup]3;+\infty[$

$$g(x)=\frac{\ln(x+3)}{5+3\ln x} \text{ : il faut que } \begin{cases} x+3>0 \\ 5+3\ln x\neq 0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-3 \\ \ln x\neq -\dfrac{5}{3} \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-3 \\ x\neq e^{-\frac{5}{3}} \\ x>0 \end{cases} \rightarrow D_g=\left]0;e^{-\frac{5}{3}}\right[\cup\left]e^{-\frac{5}{3}};+\infty\right[$$

Exercice 3 :
/ 4 pts

$\ln(3x-2)=\ln(5-2x)$

il faut que $3x-2>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{2}{3}$ et $5-2x>0 \Leftrightarrow x<\dfrac{5}{2}$ donc $D_E=\left]\dfrac{2}{3};\dfrac{5}{2}\right[$

$\ln(3x-2)=\ln(5-2x) \Leftrightarrow 3x-2=5-2x \Leftrightarrow 5x=7 \Leftrightarrow x=\dfrac{7}{5}$

$\dfrac{7}{5}\in D_E$ donc $S=\left\{\dfrac{7}{5}\right\}$

$\ln(x+1)\geq\ln\left(x^2-4x+3\right)$

il faut que $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$ et $x^2-4x+3>0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3)>0 \Leftrightarrow x\in]-\infty;1[\cup]3;+\infty[$

→donc $D_E=]-1;1[\cup]3;+\infty[$

$\ln(x+1)\geq\ln\left(x^2-4x+3\right) \Leftrightarrow x+1\geq x^2-4x+3 \Leftrightarrow 0\geq x^2-5x+2$

$$\Leftrightarrow 0\geq\left(x-\frac{5-\sqrt{17}}{2}\right)\left(x-\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right) \text{ donc } R=\left[\frac{5-\sqrt{17}}{2};\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right].$$

Ainsi : $S=D_E\cap R=\left[\dfrac{5-\sqrt{17}}{2};1\right[\cup\left]3;\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}\right]$

Exercice 4 :
/ 2 pts

$h(x)=\ln\left(4-9x^2\right)$ → $h'(x)=\dfrac{-18x}{4-9x^2}$

$$i(x)=\frac{\ln(3+2x)}{2x+9} \rightarrow i'(x)=\frac{\frac{2}{3+2x}\times(2x+9)-\ln(3+2x)\times 2}{(2x+9)^2}=\frac{2(2x+9)-\ln(3+2x)\times 2(3+2x)}{(3+2x)(2x+9)^2}$$

Exercice 5 : / 2 pts

Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse $x_0 = e$ de la représentation graphique de la fonction

$$j(x) = \frac{1+\ln x}{2+\ln x}$$

$$j(e) = \frac{1+\ln e}{2+\ln e} = \frac{2}{3}$$

$$j'(x) = \frac{\frac{1}{x}(2+\ln x)-(1+\ln x)\times\frac{1}{x}}{(2+\ln x)^2} \quad j'(x) = \frac{2+\ln x-1-\ln x}{x(2+\ln x)^2} = \frac{1}{x(2+\ln x)^2} \quad \rightarrow j'(e) = \frac{1}{e(2+\ln e)^2} = \frac{1}{9e}$$

$$T : y = \frac{1}{9e}(x-e)+\frac{2}{3} = \frac{1}{9e}x-\frac{1}{9}+\frac{2}{3} = \frac{1}{9e}x+\frac{5}{9}$$

Exercice 6 : / 2 pts

Résoudre l'équation : $-3\ln^2 x+7\ln x-4=0$

On pose $X = \ln x$ et l'équation devient : $-3X^2+7X-4=0$

$\Delta = 7^2-4\times(-3)\times(-3) = 49-48 = 1$: deux solutions : $X_1 = \frac{-7-1}{2\times(-3)} = \frac{-8}{-6} = \frac{4}{3}$ et $X_2 = \frac{-7+1}{2\times(-3)} = \frac{-6}{-6} = 1$.

Or $X = \ln x$ donc $x = e^X$ donc on obtient deux solutions : $S = \left\{ e^{\frac{4}{3}} ; e^1 \right\}$.

Exercice 7 : / 2 pts

Déterminer les limites suivantes (en utilisant des changements de variable) :

$\lim\limits_{x\to 0} \ln\left(4-4e^{2x}\right)$: on pose $X = 2x$ donc $\lim\limits_{x\to 0} e^{2x} = \lim\limits_{X\to 0} e^X = 1$

Par produit et par quotient : $\lim\limits_{x\to 0} 4-4e^{2x} = 0$

On pose $Y = 4-4e^{2x}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \ln\left(4-4e^{2x}\right) = \lim\limits_{Y\to 0} \ln Y = -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} x+\ln\left(1+e^{-x}\right) = \lim_{x\to-\infty} x+\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right) = \lim_{x\to-\infty} x+\ln\left(e^x+1\right)-\ln\left(e^x\right) = \lim_{x\to-\infty} \ln\left(e^x+1\right)$$

On pose $X = e^x+1$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(e^x+1\right) = \lim\limits_{X\to 1} \ln X = 0$.

Exercice 8 : / 2 pts

On place une somme d'argent X à un taux annuel de 7% toutes taxes comprises.
Dans combien d'années ce capital aura-t-il doublé ? Proposer un algorithme simple de résolution.

Soit X la somme initiale, l'année suivante le nouveau capital est : $X\times 1,07$, l'année suivante : $(X\times 1,07)\times 1,07$ et ainsi de suite. Donc dans n années, le capital sera : $X\times 1,07^n$.

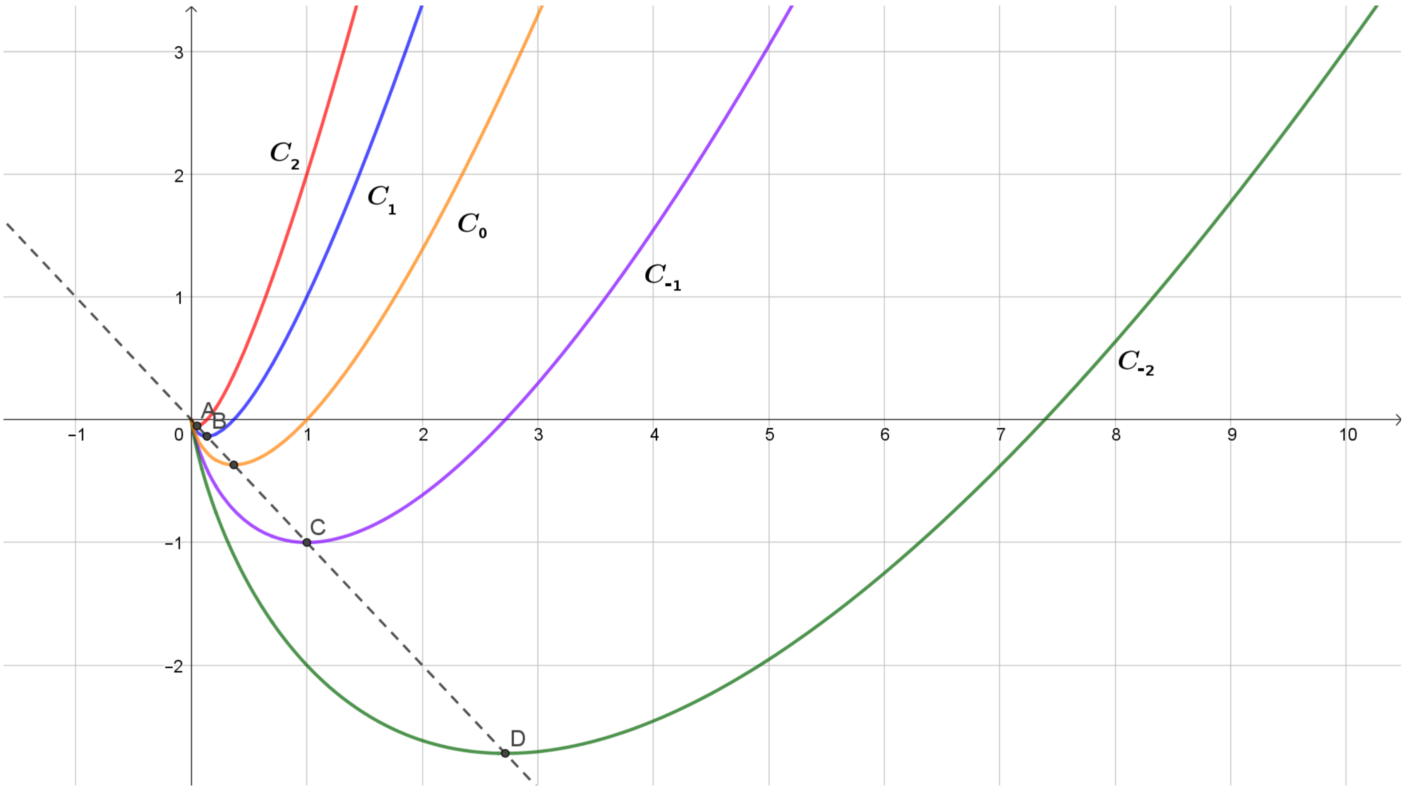
La question devient : Résoudre : $X\times 1,07^n \geq 2X \iff 1,07^n \geq 2$ car X est non nul et positif.

$$\iff n\times\ln 1,07 \geq \ln 2 \iff n \geq \frac{\ln 2}{\ln 1,07} \iff n \geq 10,24 \text{ soit à partir de la } 12^{\text{ème}} \text{ année}$$

Exercice 9 : / 3 pts

Soit f_k *la fonction définie sur* $[0;+\infty[$ *par* $f_k(x) = x\ln x+kx$ *pour tout* k *réel et* C_k *sa courbe représentative.*

En quel réel x_k la fonction f_k admet-elle un minimum ? Quelle est alors la courbe décrite par le point M_k de C_k d'abscisse x_k ?



Le minimum d'une fonction est déterminé par l'étude de la dérivée.
La fonction f_k est dérivable sur $[0;+\infty[$ en tant que composée de fonctions logarithme et polynomiale :

$\forall x \in [0;+\infty[,\quad f_k'(x) = 1\times\ln x + x\times\dfrac{1}{x} + k = \ln x + 1 + k$.

$f_k'(x) > 0 \iff \ln x + 1 + k > 0 \iff \ln x > -1-k \iff x > e^{-1-k}$

x	0		e^{-1-k}		$+\infty$
$f_k'(x)$		$-$	0	$+$	
f_k		$\searrow$	$-e^{-1-k}$	$\nearrow$	

$f_k\left(e^{-1-k}\right) = e^{-1-k}\times\ln\left(e^{-1-k}\right) + k\left(e^{-1-k}\right) = e^{-1-k}\times(-1-k) + k\left(e^{-1-k}\right) = -e^{-1-k}$.

Ainsi le minimum M_k de chaque fonction f_k a pour coordonnées : $M_k\left(e^{-1-k};-e^{-1-k}\right)$, soit $y_k = -x_k$.

Tous les points M_k sont une droite d'équation $y = -x$.