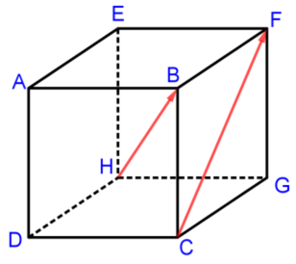
Exercices sur le produit scalaire

Exercice 1A.1 :

ABCDEFGH est un cube d'arête 1.

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CF}$:

1) sans utiliser de repère.
2) à l'aide d'un repère.



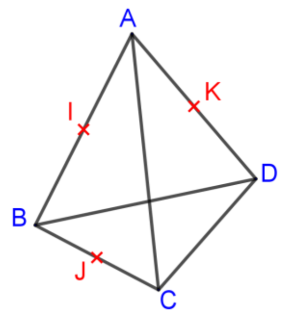
Exercice 1A.2 :

ABCD est un tétraèdre régulier d'arête a.

I, J et K sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$ et $[AD]$.

Déterminer les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$
2) $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{AJ}$
3) $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{CD}$
4) $\overrightarrow{JK}.\overrightarrow{AD}$
5) $\overrightarrow{JA}.\overrightarrow{JD}$
6) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DA}$



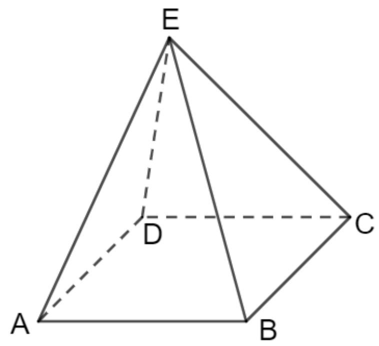
Exercice 1A.3 :

ABCDE est une pyramide à base carrée de sommet E.

Toutes les arêtes sont de même longueur a.

Déterminer les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}$
2) $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EC}$
3) $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{DC}$
4) $\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{DB}$
5) $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{EC}$

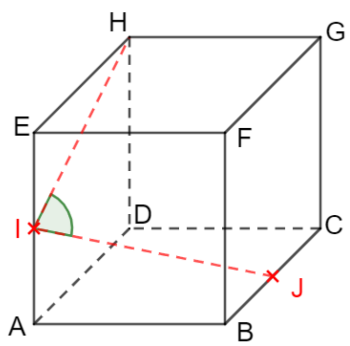


Exercice 1A.4 :

ABCDEFGH est un cube d'arête de longueur 1.

I et J sont les milieux respectifs de $[AE]$ et $[BC]$.

Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{HIJ}$ à 0,1 près.

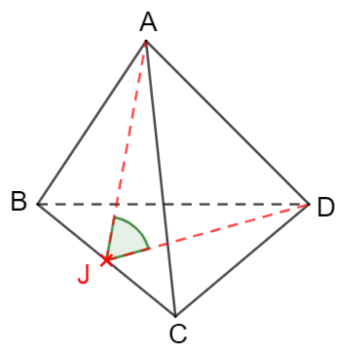


Exercice 1A.5 :

ABCD est un tétraèdre régulier d'arête a.

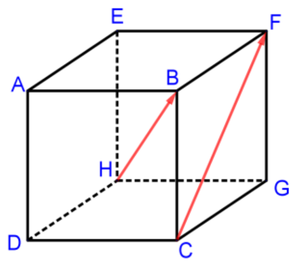
J est le milieu de $[BC]$.

Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{AJD}$ à 0,1 près.



Exercice 1A.1 :

ABCDEFGH est un cube d'arête 1.
Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CF}$ *:*
1) sans utiliser de repère.
2) à l'aide d'un repère.



1) Toutes les faces adjacentes du cube sont perpendiculaires.

$$\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GF}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CF} &= \left(\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}\right).\left(\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GF}\right)\\ &= \overrightarrow{HD}.\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{HD}.\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{GF}\\ &= 1\times1\times\cos\pi+0+0+0+0+1\times1\times\cos0\\ &= 0\end{aligned}$$

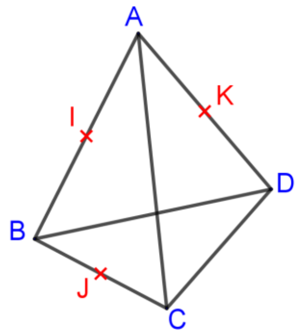
2) Dans le repère $\left(D,\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH},\overrightarrow{DA}\right)$, on obtient les coordonnées suivantes :

$$H(0;1;0)\ ,\ B(1;0;1)\ ,\ C(1;0;0)\ ,\ F(1;1;1)\ ,\ \overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\ ,\ \overrightarrow{CF}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Ainsi : $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CF}=1\times0+(-1)\times1+1\times1=0$.

Exercice 1A.2 :

ABCD est un tétraèdre régulier d'arête a.
I, J et K sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$ *et* $[AD]$.
Déterminer les produits scalaires suivants:
1) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$
2) $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{AJ}$
3) $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{CD}$
4) $\overrightarrow{JK}.\overrightarrow{AD}$



Dans un tétraèdre régulier, toutes les faces sont des triangles équilatéraux.

1) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AD}\right\|\times\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=a\times a\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=a^2\times\frac{1}{2}=\frac{a^2}{2}$

2) J est le milieu de $[BC]$ donc (AJ) est une médiane du triangle ABC et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AJ}\right)=\frac{\pi}{6}$.

En faisant un schéma, on obtient : $\overrightarrow{BI},\overrightarrow{AJ}=\frac{-5\pi}{6}$

$$\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{AJ}=\left\|\overrightarrow{BI}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AJ}\right\|\times\cos\left(\overrightarrow{BI},\overrightarrow{AJ}\right)=\frac{a}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a\times\cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{3a^2}{8}$$

AUTRE METHODE :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{AJ}&=\overrightarrow{BI}.\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}\right)=\left\|\overrightarrow{BI}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AJ}\right\|\times\cos(\pi)+\left\|\overrightarrow{BI}\right\|\times\left\|\overrightarrow{BJ}\right\|\times\cos\left(\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BJ}\right)\\ &=-a\times\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\times\frac{a}{2}\times\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{4}\times\frac{1}{2}=-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{8}=-\frac{3a^2}{8}\end{aligned}$$

3) METHODE ASTUCIEUSE :

I milieu de $[AB]$ et J milieu de $[BC]$: d'après le théorème des milieux : $\overrightarrow{IJ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Donc :

$$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}=-\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{CA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{CD}\right\|\times\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}\right)=-\frac{1}{2}a\times a\times\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

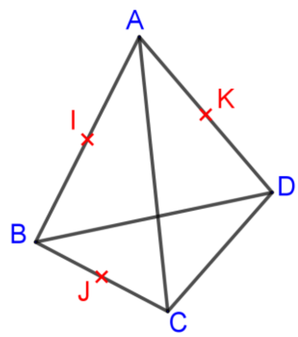
$$=-\frac{a^2}{2}\times\frac{1}{2}=-\frac{a^2}{4}$$

4) Le triangle AJD est isocèle en AJ : les deux hauteurs $[JA]$ et $[JD]$ sont de même longueur.

Ainsi J appartient à la médiatrice de $[AD]$ et K étant le milieu de $[AD]$, la médiatrice de $[AD]$ est la droite (JK).

Donc : $\overrightarrow{JK}.\overrightarrow{AD}=0$.

<u>Autre méthode :</u> avec un repère



Dans le repère $\left(B,\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right)$, on définit les points suivants :

$A(1;0;0)$, $C(0;1;0)$, $D(0;0;1)$,

$I(0,5;0;0)$, $J(0;0,5;0)$

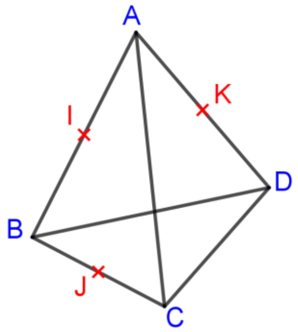
Or : $\overrightarrow{BK}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}\right)$ donc : $K(0,5;0;0,5)$

On peut définir les vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix}0,5\\-0,5\\0,5\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad\overrightarrow{AD}\left|\begin{matrix}-1\\0\\1\end{matrix}\right.$$

Ainsi : $\overrightarrow{JK}.\overrightarrow{AD}=-0,5+0+0,5=0$

<u>Autre méthode :</u> avec le produit scalaire, les médianes étant toutes des hauteurs



$$\begin{aligned}\overrightarrow{JK}.\overrightarrow{AD}&=\left(\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{BK}\right).\overrightarrow{AD}\\&=\overrightarrow{JB}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AD}\\&=\overrightarrow{JB}.\overrightarrow{AD}\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}\\&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{KC}\right).\overrightarrow{AD}\\&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{AD}\right)\\&=0\end{aligned}$$

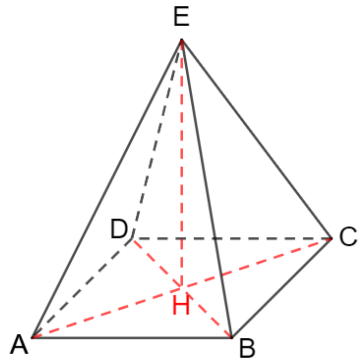
Car les médianes $[BK]$ et $[KC]$ sont des hauteurs dans les triangles équilatéraux ABD et ACD.

5) $$\begin{aligned}\overrightarrow{JA}.\overrightarrow{JD}&=\left(\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{BA}\right).\overrightarrow{JD}\\&=\overrightarrow{JB}.\overrightarrow{JD}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{JD}\\&=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{JD}\end{aligned}$$

$$= \overrightarrow{BA}.\left(\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{ID}\right)$$
$$= \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{ID}$$
$$= -BJ^2 + BA \times BI + 0$$
$$= -BJ^2 + 2 \times BI \times BI$$
$$= -BJ^2 + 2 \times BI^2$$
$$= BI^2$$

6) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DA} = \left(\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{KC}\right).\overrightarrow{DA}$

$$= \left(\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{DA}\right) = 0$$



Exercice 1A.3 :

ABCDE est une pyramide à base carrée de sommet E.

Toutes les arêtes sont de même longueur a.

Déterminer les produits scalaires suivants :

Tous les triangles sont équilatéraux.

On considère H le pied de la hauteur issue de E.

On obtient aisément avec Pythagore : $AH = EH = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times a$.

1) $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB} = EA \times EB \times \cos 60 = a \times a \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{a^2}{2}$

Autre méthode :

$$\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB} = \left(\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{HA}\right).\left(\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{HB}\right)$$
$$= \overrightarrow{EH}.\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HB}$$
$$= EH \times EH$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}a \times \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{1}{2}a^2$$

2) $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EC}$

Dans le triangle rectangle AHE, $\sin AEH = \dfrac{AH}{AE} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2} \times a}{a} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donc $AEH = \sin^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

Ainsi : $AEC = 2 \times AEH = 2 \times \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$ et le triangle AEC est rectangle en E.

Donc : $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EC} = 0$.

Autre méthode :

$$\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EC} = \left(\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{HA}\right).\left(\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{HC}\right) = \overrightarrow{EH}.\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HC} = EH \times EH - HA \times HC = 0$$

3) $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EA}.\overrightarrow{AB} = EA \times AB \times \cos 120 = a \times a \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{a^2}{2}$

Autre méthode :

$$\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{DC} = \left(\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{HA}\right).\left(\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{HC}\right) = \overrightarrow{EH}.\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HC}$$
$$= 0+0+0-HA \times HC = -\frac{\sqrt{2}}{2}a \times \frac{\sqrt{2}}{2}a = -\frac{a^2}{2}$$

4) $\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{DB}$ → de même, le triangle EDB est rectangle et isocèle en E, donc $\widehat{EDB}=45$ et $\left(\overrightarrow{ED},\overrightarrow{DB}\right)=135°$

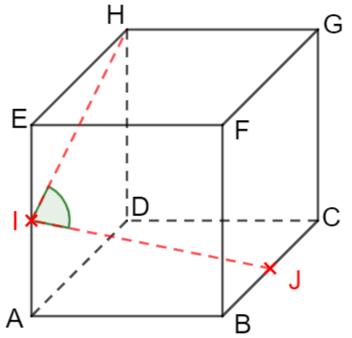
$$\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{DB}=ED\times DB\times\cos 135=a\times\sqrt{2}a\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-a^2$$

Autre méthode :

$$\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{DB}=\left(\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{HD}\right).\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{HD}.\overrightarrow{DB}=-HD\times DB=-\frac{\sqrt{2}}{2}a\times\sqrt{2}a=-a^2$$

5) $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{DB}.\left(\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{HC}\right)=\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{HC}=0$

Exercice 1A.4 :



ABCDEFGH est un cube d'arête de longueur 1.
I et J sont les milieux respectifs de $[AE]$ *et* $[BC]$.

Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{HIJ}$ *à 0,1 près.*

Nous devons définir un repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

On obtient : $I\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$, $J\left(1;\frac{1}{2};0\right)$ et $H(0;1;1)$.

D'où les vecteurs : $\overrightarrow{IJ}\left(1;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{IH}\left(0;1;\frac{1}{2}\right)$.

Calcul du produit scalaire :

$$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IH}=1\times0+\frac{1}{2}\times1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

$$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IH}=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}\times\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\times\cos\left(\widehat{HIJ}\right)=\sqrt{\frac{3}{2}}\times\sqrt{\frac{5}{4}}\times\cos\left(\widehat{HIJ}\right)$$

Par identification :

$$\sqrt{\frac{3}{2}}\times\sqrt{\frac{5}{4}}\times\cos\left(\widehat{HIJ}\right)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\cos\left(\widehat{HIJ}\right)=\frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{3}{2}}\times\sqrt{\frac{5}{4}}}\Leftrightarrow\widehat{HIJ}=\cos^{-1}\left(\frac{1}{4\sqrt{\frac{3}{2}}\times\sqrt{\frac{5}{4}}}\right)\simeq79{,}48°$$

Autre méthode : Avec le produit scalaire (aucun besoin de repère)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IH}&=\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}\right).\left(\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{EH}\right)\\&=\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{EH}\\&=-IA^2+0+0+0+0+BJ\times EH\\&=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}IJ^2=\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IJ}&=\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}\right).\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}\right)\\&=\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{BJ}\\&=IA^2+0+0+0+AB^2+0+0+0+BJ^2\\&=\frac{1}{4}+1+\frac{1}{4}=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

$$\rightarrow \mathrm{IJ} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{IH}^2 = \overrightarrow{\mathrm{IH}}.\overrightarrow{\mathrm{IH}} &= \left(\overrightarrow{\mathrm{IE}}+\overrightarrow{\mathrm{EH}}\right).\left(\overrightarrow{\mathrm{IE}}+\overrightarrow{\mathrm{EH}}\right)\\ &= \overrightarrow{\mathrm{IE}}.\overrightarrow{\mathrm{IE}}+\overrightarrow{\mathrm{IE}}.\overrightarrow{\mathrm{EH}}+\overrightarrow{\mathrm{EH}}.\overrightarrow{\mathrm{IE}}+\overrightarrow{\mathrm{EH}}.\overrightarrow{\mathrm{EH}}\\ &= \mathrm{IE}^2+0+0+\mathrm{EH}^2\\ &= \frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}\end{aligned}$$

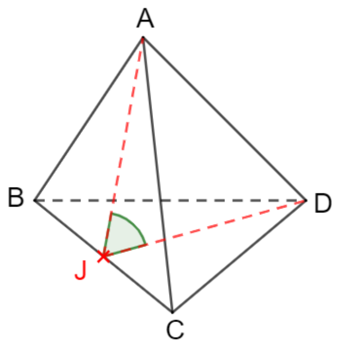
$$\rightarrow \mathrm{IH} = \sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}}\times\sqrt{\frac{5}{4}}\times\cos\left(\mathrm{HIJ}\right)=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos\left(\mathrm{HIJ}\right)=\frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{3}{2}}\times\sqrt{\frac{5}{4}}} \Leftrightarrow \mathrm{HIJ}=\cos^{-1}\left(\frac{1}{4\sqrt{\frac{3}{2}}\times\sqrt{\frac{5}{4}}}\right)\simeq 79,48°$$

Exercice 1A.5 :

ABCD est un tétraèdre régulier d'arête a.
J est le milieu de $[\mathrm{BC}]$.

Déterminer une mesure de l'angle AJD *à 0,1 près.*



Le théorème de Pythagore permet d'obtenir :

$$\mathrm{JA}=\mathrm{JD}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times a$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{JA}}.\overrightarrow{\mathrm{JD}} &= \left(\overrightarrow{\mathrm{JB}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right).\left(\overrightarrow{\mathrm{JB}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right)\\ &= \overrightarrow{\mathrm{JB}}.\overrightarrow{\mathrm{JB}}+\overrightarrow{\mathrm{JB}}.\overrightarrow{\mathrm{BD}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}.\overrightarrow{\mathrm{JB}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}.\overrightarrow{\mathrm{BD}}\\ &= \mathrm{JB}^2+\mathrm{JB}\times\mathrm{BD}\times\cos\left(\overrightarrow{\mathrm{JB}},\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right)+\mathrm{BA}\times\mathrm{JB}\times\cos\left(\overrightarrow{\mathrm{BA}},\overrightarrow{\mathrm{JB}}\right)+\mathrm{BA}\times\mathrm{BD}\times\cos(60)\\ &= \left(\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a}{2}\times a\times\cos(120)+a\times\frac{a}{2}\times\cos(120)+a\times a\times\cos(60)\\ &= \frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{a^2}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{a^2}{2}\\ &= \frac{a^2}{4}\end{aligned}$$

En identifiant les deux produits scalaires :

$$\mathrm{JA}\times\mathrm{JD}\times\cos\left(\mathrm{AJD}\right)=\frac{a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\mathrm{AJD}\right)=\frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{3}{4}a^2}=\frac{a^2}{4}\times\frac{4}{3a^2}=\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{AJD}=\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\simeq 70,53°$$