Produit scalaire

Exercice 1B.1 :

1) Soit $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ un repère orthonormal et le vecteur $\vec{u}(0;1;2)$.

   Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

   a) il existe un et un seul vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{v}.\vec{u}=0$ et $\vec{v}.\vec{i}=0$

   b) il existe un et un seul vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{v}.\vec{u}=0$ et $\vec{v}.\vec{k}=1$

   c) il n'existe pas de vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{v}.\vec{u}=1$ et $\vec{v}.\vec{i}=1$ et $\vec{v}.\vec{j}=1$

2) Soit $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ un repère orthonormal direct, A et B deux points fixés, M et N deux points quelconques. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?

$$\text{si } \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AB} \text{ alors } M = N$$

Exercice 1B.2 :

Dans une base orthonormale directe, on donne les vecteurs

$$\vec{u}(1;0;1),\ \vec{v}(-1;2;3),\ \vec{w}(2;1;4),\ \vec{x}(1;1;1)$$

1) Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ?
2) Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{x}$ sont-ils coplanaires ?

Exercice 1B.3 :

Déterminer l'angle entre les vecteurs $\vec{u}(-5;-1;4)$ et $\vec{v}(3;-2;-3)$.

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 1B.1 :

1) **a)** Soit $\vec{v}(x;y;z)$ et $\begin{cases}\vec{v}.\vec{u}=0\\ \vec{v}.\vec{i}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y+2z=0\\ x=0\end{cases}$ donc $\vec{v}(0;-2z;z)$, $z\in\mathbb{R}$ est solution

$\vec{v}$ **n'est donc pas unique**

b) $\begin{cases}\vec{v}.\vec{u}=0\\ \vec{v}.\vec{k}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y+2z=0\\ z=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-2\\ z=1\end{cases}$ donc $\vec{v}(x;-2;1)$, $x\in\mathbb{R}$ est solution

$\vec{v}$ **n'est donc pas unique**

c) $\begin{cases}\vec{v}.\vec{u}=0\\ \vec{v}.\vec{i}=1\\ \vec{v}.\vec{j}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y+2z=0\\ x=1\\ y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=-\dfrac{1}{2}\\ x=1\\ y=1\end{cases}$ donc $\vec{v}\left(1;1;-\dfrac{1}{2}\right)$ est solution

2) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}\right).\overrightarrow{AB}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{NM}.\overrightarrow{AB}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{NM}\perp\overrightarrow{AB}$

donc **l'affirmation est fausse : M et N ne sont pas forcément confondus.**

Exercice 1B.2

Dans une base orthonormale directe, on donne les vecteurs $\vec{u}(1;0;1)$, $\vec{v}(-1;2;3)$, $\vec{w}(2;1;4)$, $\vec{x}(1;1;1)$

1) *Les vecteurs* $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ *sont-ils coplanaires ?*
Peut-on trouver deux réels a et b tels que :

$$\vec{u}=a\vec{v}+b\vec{w} \Leftrightarrow \begin{cases}1=-a+2b\\ 0=2a+b\\ 1=3a+4b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1=-a+2\times(-2a)\\ b=-2a\\ 1=3a+4\times(-2a)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1=-5a\\ b=-2a\\ 1=-5a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-\dfrac{1}{5}\\ b=-2a=\dfrac{2}{5}\\ a=-\dfrac{1}{5}\end{cases}$$

Ainsi : $\vec{u}=-\dfrac{1}{5}\vec{v}+\dfrac{2}{5}\vec{w}$ et les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires.

2) *Les vecteurs* $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{x}$ *sont-ils coplanaires ?*
Peut-on trouver deux réels *c* et *d* tels que :

$$\vec{u}=c\vec{v}+d\vec{x} \Leftrightarrow \begin{cases}1=-c+d\\ 0=2c+d\\ 1=3c+d\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=d\\ 0=2c+c\\ 1=3c+c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=d\\ 0=3c\\ 1=4c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=d\\ c=0\\ c=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution, donc les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{x}$ ne sont pas coplanaires ?

Exercice 1B.3

Déterminer l'angle entre les vecteurs $\vec{u}(-5;-1;4)$ *et* $\vec{v}(3;-2;-3)$.

On calcule le produit scalaire de deux manières différentes :

$$\vec{u}.\vec{v} = 3\times(-5) - 2\times(-1) - 3\times 4 = -15 + 2 - 12 = -25$$

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \sqrt{(-5)^2+(-1)^2+4^2}\times\sqrt{3^2+(-2)^2+(-3)^2}\times\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)$$

$$= \sqrt{42}\times\sqrt{22}\times\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)$$

Ainsi :

$$\sqrt{42}\times\sqrt{22}\times\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right) = -25$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \frac{-25}{\sqrt{42}\times\sqrt{22}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\vec{u},\vec{v}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-25}{\sqrt{42}\times\sqrt{22}}\right) \simeq 145,33°$$