Déterminer une équation cartésienne d'un plan en connaissant trois points (3 méthodes)

Exercice 2A.1: Soient les points $A(-1;2;-3)$, $B(1;-1;1)$ et $C(1;2;3)$.
Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

Exercice 2A.2: Soient les points $A(1;2;5)$, $B(-2;1;3)$ et $C(5;3;-1)$.
Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

Exercice 2A.3: Soient les points $\mathrm{D}(2;4;-6)$, $\mathrm{E}(-1;3;-2)$ et $\mathrm{F}(3;1;-5)$.
Déterminer une équation cartésienne du plan (DEF).

Exercice 2A.1: *Soient les points* $A(-1;2;-3)$, $B(1;-1;1)$ *et* $C(1;2;3)$.

Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

On vérifie d'abord que les points ne sont pas alignés : les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}(2;-3;4)$ et $\overrightarrow{AC}(2;0;6)$ ne sont pas colinéaires, les trois points définissent bien un plan de l'espace.
On cherche une équation cartésienne de la forme :

$$ax+by+cz+d=0.$$

1ère méthode : avec un système

On fixe une variable : on décide de poser $d=1$: on suppose donc que le plan ne passe pas par l'origine.

$$\begin{cases} -a+2b-3c+1=0 \\ a-1b+1c+1=0 \\ 1a+2b+3c+1=0 \end{cases},\ a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R},\ \text{soit : } \begin{cases} -a+2b-3c=-1 \\ a-b+c=-1 \\ a+2b+3c=-1 \end{cases}$$

On peut utiliser les méthodes vues en seconde pour résoudre un système de 3 équations à 3 inconnues.

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} -L_1\to L_1 \\ L_2+L_1\to L_2 \\ L_3+L_1\to L_3 \end{array} \right. \begin{cases} a-2b+3c=1 \\ b-2c=-2 \\ 4b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{-9}{4} \\ c=\dfrac{3}{4} \\ b=\dfrac{-1}{2} \end{cases} \text{ on obtient } (P): \frac{-9}{4}x+\frac{-1}{2}y+\frac{3}{4}z+1=0$$

En multipliant par -4, on obtient : $(P): 9x+2y-3z-4=0$.

2ème méthode : à partir des équations paramétriques du plan

On vérifie d'abord que les points ne sont pas alignés : on calcule les coordonnées de deux vecteurs :

$\overrightarrow{AB}(2;-3;4)$ et $\overrightarrow{AC}(2;0;6)$ → ces vecteurs ne sont pas colinéaires

On définit une représentation paramétrique du plan (ABC) :

$$\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{cases} x=-1+2k+2t \\ y=2-3k \\ z=-3+4k+6t \end{cases},\ k,t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1+2\times\left(\dfrac{2-y}{3}\right)+2t \\ k=\dfrac{2-y}{3} \\ z=-3+4k+6t \end{cases},\ k,t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{2}{3}y-\dfrac{1}{3}=2t \\ k=\dfrac{2-y}{3} \\ z=-3+4k+6t \end{cases},\ k,t\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}-\dfrac{1}{6} \\ k=\dfrac{2-y}{3} \\ z=-3+4\times\left(\dfrac{2-y}{3}\right)+6\times\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}-\dfrac{1}{6}\right) \end{cases},\ k,t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}-\dfrac{1}{6} \\ k=\dfrac{2-y}{3} \\ z=-3+\dfrac{8}{3}-\dfrac{4y}{3}+3x+2y-1 \end{cases},\ k,t\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}-\dfrac{1}{6} \\ k=\dfrac{2-y}{3} \\ z=3x+\dfrac{2y}{3}-\dfrac{4}{3} \end{cases}, k,t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}-\dfrac{1}{6} \\ k=\dfrac{2-y}{3} \\ 3x+\dfrac{2y}{3}-z-\dfrac{4}{3}=0 \end{cases}, k,t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}-\dfrac{1}{6} \\ k=\dfrac{2-y}{3} \\ 9x+2y-3z-4=0 \end{cases}, k,t\in\mathbb{R}$$

3ème méthode : hautement recommandée, en trouvant un vecteur normal

On vérifie d'abord que les points ne sont pas alignés : on calcule les coordonnées de deux vecteurs :

$\overrightarrow{AB}(2;-3;4)$ et $\overrightarrow{AC}(2;0;6)$ →ces vecteurs ne sont pas colinéaires

Soit $\vec{n}(a;b;c)$ un vecteur normal du plan (ABC). Ainsi :

$$\begin{cases} \vec{n}.\overrightarrow{AB}=0 \\ \vec{n}.\overrightarrow{AC}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-3b+4c=0 \\ 2a+6c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-3b+4c=0 \\ a=-3c \end{cases}$$

Or il existe une infinité de vecteurs normaux au plan (ABC) dont un ayant pour côte $c=1$.

On fixe $c=1$, le système devient :

$$\begin{cases} 2a-3b+4c=0 \\ a=-3c \\ c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-\dfrac{1}{3}(-2a-4c)=-\dfrac{1}{3}(-2\times(-3)-4\times 1)=-\dfrac{1}{3}\times 2=-\dfrac{2}{3} \\ a=-3\times 1=-3 \\ c=1 \end{cases}$$

L'équation cartésienne du plan est :

$$-3x-\frac{2}{3}y+z+d=0$$
$$\Leftrightarrow\ 9x+2y-3z+d'=0$$

Or le point $B(1;-1;1)$ appartient à ce plan :

$$9x_B+2y_B-3z_B+d'=0$$
$$\Leftrightarrow\ 9\times 1+2\times(-1)-3\times 1+d'=0$$
$$\Leftrightarrow\ 9-2-3+d'=0$$
$$\Leftrightarrow\ d'=-4$$

Une équation cartésienne du plan (ABC) est : $9x+2y-3z-4=0$.

4ème méthode : le feeling (parfois)

On pourrait essayer de chercher un vecteur normal aux deux vecteurs qui dirigent le plan mais cette démarche peut s'avérer infructueuse sans flair…

On cherche un vecteur $\vec{n}$ normal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}(2;-3;4)$ et $\overrightarrow{AC}(2;0;6)$:

→la composante nulle du vecteur $\overrightarrow{AC}(2;0;6)$ permet d'essayer une valeur au feeling :

$2a+6c=0$ donne la possibilité d'essayer $c=1$ impliquant $a=-3$.

→on reporte dans le premier produit scalaire :

$$2a-3b+4c=0 \Leftrightarrow b=-\frac{1}{3}(-2a-4c)=-\frac{1}{3}(-2\times(-3)-4\times 1)=-\frac{1}{3}\times 2=-\frac{2}{3}$$

→on obtient $\vec{n_1}\left(-3;-\dfrac{2}{3};1\right)$ puis $\vec{n}(9;2;-3)$.

Exercice 2A.2: *Soient les points* $A(1;2;5)$, $B(-2;1;3)$ *et* $C(5;3;-1)$.

Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

On vérifie d'abord que les points ne sont pas alignés : les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}(-3;-1;-2)$ et $\overrightarrow{AC}(4;1;-6)$ ne sont pas colinéaires, les trois points définissent bien un plan de l'espace.
On cherche une équation cartésienne de la forme :

$$ax+by+cz+d=0.$$

Méthode la plus rapide : en trouvant un vecteur normal

Soit $\vec{n}(a;b;c)$ un vecteur normal du plan (ABC). Ainsi :

$$\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3a-b-2c=0\\ 4a+b-6c=0\end{cases}$$

Or il existe une infinité de vecteurs normaux au plan (ABC) dont un ayant pour côte $c=1$.

On fixe $c=1$, le système devient :

$$\begin{cases}-3a-b-2=0\\ 4a+b-6=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3a-(-4a+6)-2=0\\ b=-4a+6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=8\\ b=-26\end{cases}$$

L'équation cartésienne du plan est :

$$8x-26y+z+d=0$$

Or le point $A(1;2;5)$ appartient à ce plan :

$$8x_A-26y_A+z_A+d=0$$
$$\Leftrightarrow\ 8\times1-26\times2+5+d=0$$
$$\Leftrightarrow\ d=-8+52-5=39$$

Une équation cartésienne du plan (ABC) est : $8x-26y+z+39=0$.

Autre méthode : avec un système

On fixe une variable : on décide de poser $d=1$: on suppose donc que le plan ne passe pas par l'origine.

$$\begin{cases}a+2b+5c+1=0\\ -2a+b+3c+1=0,\ a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}\\ 5a+3b-c+1=0\end{cases} \text{ soit : } \begin{cases}a+2b+5c=-1\\ -2a+b+3c=-1\\ 5a+3b-c=-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{|l}3L_1\\ 6L_2\\ 2L_3\end{array}\begin{cases}3a+6b+15c=-3\\ -12a+6b+18c=-6\\ 10a+6b-2c=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{|l}L_1\\ L_1-L_2\\ L_2-L_3\end{array}\begin{cases}3a+6b+15c=-3\\ 15a-3c=3\\ -22a+20c=-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{|l}L_1/3\\ L_2/3\\ L_3/2\end{array}\begin{cases}a+2b+5c=-1\\ 5a-c=1\\ -11a+10c=-2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{|l}L_1\\ 10L_2\\ L_3\end{array}\begin{cases}a+2b+5c=-1\\ 50a-10c=10\\ -11a+10c=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{|l}L_1\\ L_2\\ L_2+L_3\end{array}\begin{cases}a+2b+5c=-1\\ 50a-10c=10\\ 39a=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{|l}L_1\\ L_2/10\\ L_3\end{array}\begin{cases}a+2b+5c=-1\\ 5a-1c=1\\ a=\dfrac{8}{39}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a+2b+5c=-1\\ -c=1-5a=1-5\times\dfrac{8}{39}\\ a=\dfrac{8}{39}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2b=-1-a-5c=-1-\dfrac{8}{39}-5\times\dfrac{1}{39}\\ c=\dfrac{1}{39}\\ a=\dfrac{8}{39}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b=-\dfrac{52}{39}=-\dfrac{4}{3} \\ c=\dfrac{1}{39} \\ a=\dfrac{8}{39} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-\dfrac{4}{3}\times\dfrac{1}{2}=-\dfrac{2}{3} \\ c=\dfrac{1}{39} \\ a=\dfrac{8}{39} \end{cases}$$

Une équation cartésienne du plan ABC est : $\dfrac{8}{39}x-\dfrac{2}{3}y+\dfrac{1}{39}z+1=0 \Leftrightarrow 8x-26y+z+39=0$.

<u>3</u>

<u>3ème méthode :</u> à partir des équations paramétriques du plan

On vérifie d'abord que les points ne sont pas alignés : on calcule les coordonnées de deux vecteurs :

$\overrightarrow{AB}(-3;-1;-2)$ et $\overrightarrow{AC}(4;1;-6)$ →ces vecteurs ne sont pas colinéaires

On définit une représentation paramétrique du plan (ABC) avec $A(1;2;5)$:

$$\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1-3k+4t \\ y=2-k+t \\ z=5-2k-6t \end{cases}, k,t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} L_1 \\ L_1-3L_2 \\ 2L_2-L_3 \end{vmatrix} \begin{cases} x=1-3k+4t \\ x-3y=1-6+4t-3t \\ 2y-z=4-5+2t+6t \end{cases}, k,t\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1-3k+4t \\ x-3y=-5+t \\ 2y-z=-1+8t \end{cases}, k,t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-3k+4t \\ x-3y+5=t \\ 2y-z=-1+8(x-3y+5) \end{cases}, k,t\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1-3k+4t \\ x-3y+5=t \\ 2y-z=-1+8x-24y+40 \end{cases}, k,t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-3k+4t \\ x-3y+5=t \\ 0=8x-26y+7+39 \end{cases}, k,t\in\mathbb{R}$$

Une équation cartésienne du plan ABC est :

$8x-26y+z+39=0$.

<u>Exercice 2A.3:</u> *Soient les points* $\mathrm{D}(2;4;-6)$, $\mathrm{E}(-1;3;-2)$ *et* $\mathrm{F}(3;1;-5)$.

Déterminer une équation cartésienne du plan (DEF).

Soit $\vec{n}(a;b;c)$ un vecteur normal du plan (DEF) avec $\overrightarrow{\mathrm{DE}}(-3;-1;4)$ et $\overrightarrow{\mathrm{DF}}(1;-3;1)$. Ainsi :

$$\begin{cases} \vec{n}.\overrightarrow{\mathrm{DE}}=0 \\ \vec{n}.\overrightarrow{\mathrm{DF}}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a-b+4c=0 \\ a-3b+c=0 \end{cases}$$

Or il existe une infinité de vecteurs normaux au plan (DEF) dont un ayant pour côte $c=1$.

On fixe $c=1$, le système devient :

$$\begin{cases} -3a-b+4=0 \\ a-3b+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3(3b-1)-b+4=0 \\ a=3b-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9b+3-b+4=0 \\ a=3b-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10b=-7 \\ a=3b-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{7}{10} \\ a=3\times\dfrac{7}{10}-1=\dfrac{11}{10} \end{cases}$$

Une équation cartésienne du plan (DEF) est :

$$\frac{11}{10}x+\frac{7}{10}y+z+d=0$$

Or le point $\mathrm{D}(2;4;-6)$ appartient à ce plan :

$$\frac{11}{10}\times 2+\frac{7}{10}\times 4-6+d=0 \Leftrightarrow \frac{22}{10}+\frac{28}{10}-\frac{60}{10}+d=0$$
$$\Leftrightarrow d=1$$

Une équation cartésienne du plan (DEF) est :

$$\frac{11}{10}x+\frac{7}{10}y+z+1=0 \Leftrightarrow 11x+7y+10+10=0.$$