Distance d'un point à un plan

Exercice 3A.1 : On considère le plan (P) d'équation $3x-2y+5z-1=0$.
Quelle est la distance du point $\mathrm{A}(1;5;-2)$ au plan (P) ?

Exercice 3A.2 : On considère le plan (P) d'équation $4x-7y+3z-1=0$.
Quelle est la distance du point $\mathrm{B}(2;1;-5)$ au plan (P) ?

Exercice 3A.3 : On considère le plan (P) d'équation $2x-3y+z-2=0$.
Quelle est la distance du point $\mathrm{C}(3;-2;1)$ au plan (P) ?

Exercice 3A.1 :

On considère le plan (P) *d'équation* $3x-2y+5z-1=0$.

Quelle est la distance du point $\mathrm{A}(1;5;-2)$ *au plan* (P) *?*

Un vecteur normal du plan (P) est : $\vec{n}(3;-2;5)$. Soit $\mathrm{H}(x_{\mathrm{H}};y_{\mathrm{H}};z_{\mathrm{H}})$ le projeté orthogonal de A sur (P).

Ainsi $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=k\times\vec{n}$ et $\mathrm{H}\in(P)$, soit :

$$\begin{cases} x_{\mathrm{H}}-1=3k \\ y_{\mathrm{H}}-5=-2k \\ z_{\mathrm{H}}+2=5k \\ 3x_{\mathrm{H}}-2y_{\mathrm{H}}+5z_{\mathrm{H}}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\mathrm{H}}=3k+1 \\ y_{\mathrm{H}}=-2k+5 \\ z_{\mathrm{H}}=5k-2 \\ 3(3k+1)-2(-2k+5)+5(5k-2)-1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{\mathrm{H}}=3k+1 \\ y_{\mathrm{H}}=-2k+5 \\ z_{\mathrm{H}}=5k-2 \\ 9k+3+4k-10+25k-10-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\mathrm{H}}=3k+1 \\ y_{\mathrm{H}}=-2k+5 \\ z_{\mathrm{H}}=5k-2 \\ 38k-18=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\mathrm{H}}=3\times\dfrac{9}{19}+1=\dfrac{46}{19} \\ y_{\mathrm{H}}=-2\times\dfrac{9}{19}+5=\dfrac{77}{19} \\ z_{\mathrm{H}}=5\times\dfrac{9}{19}-2=\dfrac{7}{19} \\ k=\dfrac{18}{38}=\dfrac{9}{19} \end{cases}$$

Ainsi les coordonnées de H sont $\left(\dfrac{46}{19};\dfrac{77}{19};\dfrac{7}{19}\right)$ et la distance du point A au plan (P) est :

$$\mathrm{AH}=k\times\|\vec{n}\|=\frac{9}{19}\times\sqrt{3^2+(-2)^2+5^2}=\frac{9}{19}\times\sqrt{38}$$

Exercice 3A.2 : *On considère le plan* (P) *d'équation* $4x-7y+3z-1=0$.

Quelle est la distance du point $\mathrm{B}(2;1;-5)$ *au plan* (P) *?*

Un vecteur normal du plan (P) est : $\vec{n}(4;-7;3)$. Soit $\mathrm{H}(x_{\mathrm{H}};y_{\mathrm{H}};z_{\mathrm{H}})$ le projeté orthogonal de B sur (P).

Ainsi : $\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{BH}}=k\times\vec{n} \\ \mathrm{H}\in(P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\mathrm{H}}-2=4k \\ y_{\mathrm{H}}-1=-7k \\ z_{\mathrm{H}}+5=3k \\ 4x_{\mathrm{H}}-7y_{\mathrm{H}}+3z_{\mathrm{H}}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\mathrm{H}}=4k+2 \\ y_{\mathrm{H}}=-7k+1 \\ z_{\mathrm{H}}=3k-5 \\ 4(4k+2)-7(-7k+1)+3(3k-5)-1=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{\mathrm{H}}=4k+2 \\ y_{\mathrm{H}}=-7k+1 \\ z_{\mathrm{H}}=3k-5 \\ 16k+8+49k-7+9k-15-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\mathrm{H}}=4k+2 \\ y_{\mathrm{H}}=-7k+1 \\ z_{\mathrm{H}}=3k-5 \\ 74k-15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\mathrm{H}}=4\times\dfrac{15}{74}+2 \\ y_{\mathrm{H}}=-7\times\dfrac{15}{74}+1 \\ z_{\mathrm{H}}=3\times\dfrac{15}{74}-5 \\ k=\dfrac{15}{74} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H = \frac{60}{74} + \frac{148}{74} = \frac{208}{74} = \frac{104}{37} \\ y_H = -\frac{105}{74} + \frac{74}{74} = -\frac{31}{74} \\ z_H = \frac{45}{74} - \frac{370}{74} = -\frac{325}{74} \\ k = \frac{15}{74} \end{cases}$$

Ainsi les coordonnées de H sont $\left(\frac{104}{37}; -\frac{31}{74}; -\frac{325}{74}\right)$ et la distance du point B au plan (P) est :

$$BH = k \times \|\vec{n}\| = \frac{15}{74} \times \sqrt{4^2 + (-7)^2 + 3^2} = \frac{15}{74} \times \sqrt{16+49+9} = \frac{15}{74} \times \sqrt{74}$$

Exercice 3A.3 : *On considère le plan (P) d'équation $2x - 3y + z - 2 = 0$.*

Quelle est la distance du point $C(3;-2;1)$ au plan (P) ?

Un vecteur normal du plan (P) est : $\vec{n}(2;-3;1)$. Soit $H(x_H; y_H; z_H)$ le projeté orthogonal de C sur (P).

Ainsi :

$$\begin{cases} \overrightarrow{CH} = k \times \vec{n} \\ H \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H - 3 = 2k \\ y_H + 2 = -3k \\ z_H - 1 = k \\ 2x_H - 3y_H + z_H - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 2k+3 \\ y_H = -3k-2 \\ z_H = k+1 \\ 2(2k+3) - 3(-3k-2) + (k+1) - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 2k+3 \\ y_H = -3k-2 \\ z_H = k+1 \\ 4k+6+9k+6+k+1-2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 2k+3 \\ y_H = -3k-2 \\ z_H = k+1 \\ 14k+11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 2 \times \left(-\frac{11}{14}\right) + 3 \\ y_H = -3 \times \left(-\frac{11}{14}\right) - 2 \\ z_H = -\frac{11}{14} + 1 \\ k = -\frac{11}{14} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H = -\frac{22}{14} + \frac{42}{14} = \frac{20}{14} = \frac{10}{7} \\ y_H = -3 \times \left(-\frac{11}{14}\right) - 2 = \frac{33}{14} - \frac{28}{14} = \frac{5}{14} \\ z_H = -\frac{11}{14} + 1 = -\frac{11}{14} + \frac{14}{14} = \frac{3}{14} \\ k = -\frac{11}{14} \end{cases}$$

Ainsi les coordonnées de H sont $\left(\frac{10}{7}; \frac{5}{14}; \frac{3}{14}\right)$ et la distance du point C au plan (P) est :

$$CH = |k| \times \|\vec{n}\| = \frac{11}{14} \times \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} = \frac{11}{14} \times \sqrt{14}$$

NB : Culture générale : $d(C;P) = \frac{|ax_C + by_C + cz_C + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|2\times 3 - 3\times(-2) + 1 - 2|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \frac{|11|}{\sqrt{14}} = \frac{11\sqrt{14}}{14}$