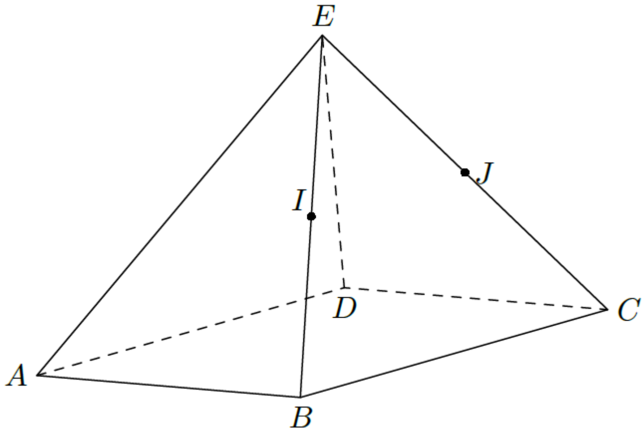
Exercices issus du site Chingatome

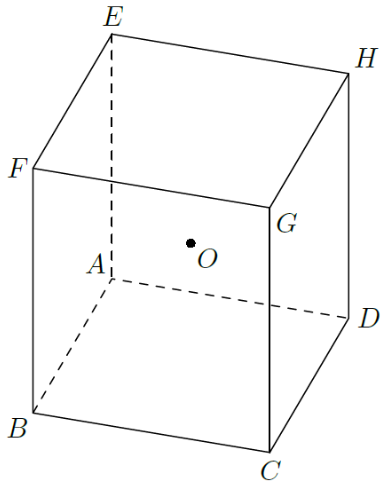
Exercice 4B.1 :



La figure ci-dessous représente la pyramide $ABCDE$ à base carrée ; les points I et J représentent les milieux respectifs des arêtes $[BE]$ et $[CE]$.

1. Justifier que les points A, D, I, J sont coplanaires.
2. a. Justifier que les droites (AI) et (DJ) sont sécantes.
   b. On note M leur point d'intersection.
   Placer le point M dans la figure ci-dessus.
3. En déduire la droite d'intersection des plans (ABE) et (CDE).

Exercice 4B.2 :



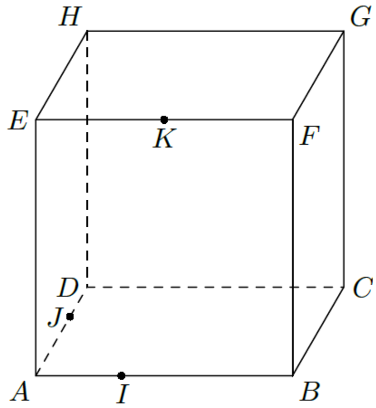
On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-contre de centre O.
Déterminer les coordonnées des points de chacun des sommets du cube ainsi que du point O dans chacun des repères suivants :

a) $\left(B;\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BF}\right)$

b) $\left(A;\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)$

c) $\left(O;\overrightarrow{OF};\overrightarrow{OG};\overrightarrow{OE}\right)$.

Exercice 4B.3 :



On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-contre et les trois points définis par :

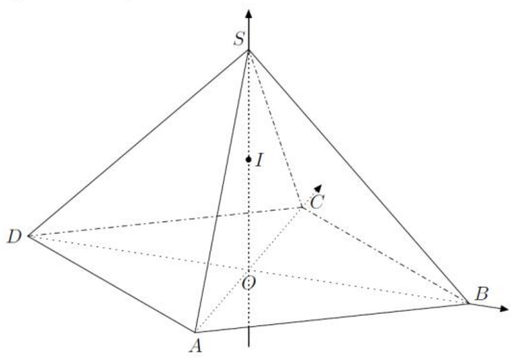
- le point K est le milieu de $[EF]$;
- le point I vérifie la relation $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$;
- le point J vérifie la relation $\overrightarrow{AJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

En utilisant le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$, montrer que les droites (IJ) et (KH) sont parallèles.

final est parallèle au rayon initial.

Exercice 6886

On considère la pyramide régulière $SABCD$ de sommet S constitué de la base carrée $ABCD$ et de triangles équilatéraux représentée ci-dessous.



Le point O est le centre de la base $ABCD$ avec $OB=1$.
On rappelle que le segment $[SO]$ est la hauteur de la pyramide et que toutes les arêtes ont la même longueur.

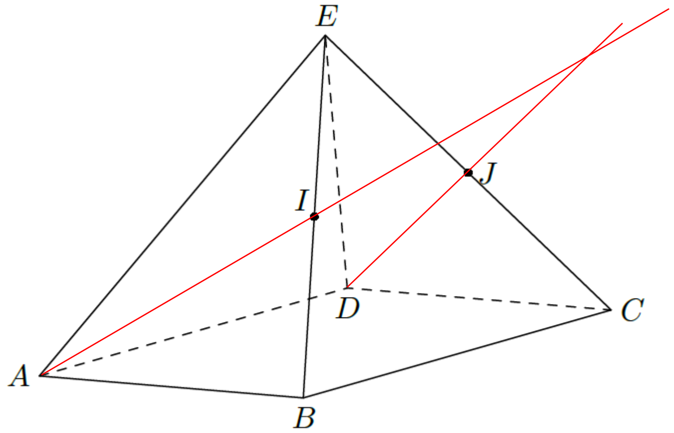
1. Justifier que le repère $(O;\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OS})$ est orthonormé.

Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère $(O;\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OS})$.

2. On définit le point K par la relation $\overrightarrow{SK}=\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{SD}$ et on note I le milieu du segment $[SO]$.
   a. Déterminer les coordonnées du point K.
   b. En déduire que les points B, I et K sont alignés.
   c. On note L le point d'intersection de l'arête $[SA]$ avec le plan (BCI).
   Justifier que les droites (AD) et (KL) sont parallèles.
   d. Déterminer les coordonnées du point L.

Exercice 4B.1 :

La figure ci-dessous représente la pyramide *ABCDE* à base carrée ; les points *I* et *J* représentent les milieux respectifs des arêtes [*BE*] et [*CE*].



1. *Justifier que les points A, D, I, J sont coplanaires.*
2. *a. Justifier que les droites (AI) et (DJ) sont sécantes.*
   b. On note M leur point d'intersection. Placer le point M dans la figure ci-dessus.
3. *En déduire la droite d'intersection des plans (ABE) et (CDE).*

1. Dans le triangle BCE, I et J sont les milieux de deux côtés.

D'après le théorème des milieux (ou Thalès) : $(IJ)//(BC)$ et $IJ=\frac{1}{2}BC$.

La base de la pyramide est le carré ABCD donc $(AD)//(BC)$.

Les droites (IJ) et (AD) sont parallèles à la droite (BC) donc : $(IJ)//(AD)$.

Deux droites parallèles sont coplanaires donc les points A, D, I, J sont coplanaires.

2. a. Les points A, D, I, J sont coplanaires donc les droites (IJ) et (AD) sont aussi coplanaires.

$$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DJ}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CJ}$$

Or $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

Donc $\overrightarrow{DJ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CJ}$

Or $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{CJ}$ ne sont pas colinéaires, donc les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{DJ}$ ne sont pas colinéaires et les droites (AI) et (DJ) sont sécantes en un point M.

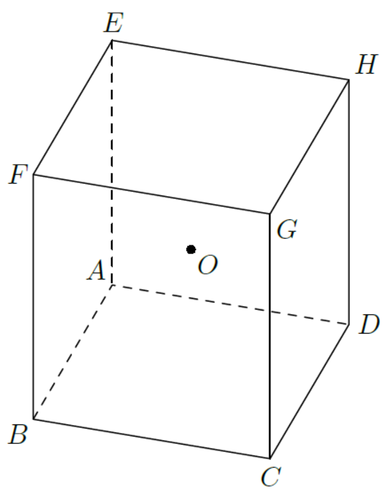
b. M est à l'intersection des droites rouges.

3. Les plans (ABE) et (CDE) ne sont pas parallèles et ont deux points en commun : E et M.

La droite d'intersection de ces plans est la droite (EM).

Exercice 4B.2 :

On considère le cube *ABCDEFGH* représenté ci-contre de centre *O*. Déterminer les coordonnées des points de chacun des sommets du cube ainsi que du point *O* dans chacun des repères suivants :



a) $\left(B;\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BF}\right)$

$A(0;1;0)$, $B(0;0;0)$, $C(1;0;0)$, $D(1;1;0)$, $E(0;1;1)$

$F(0;0;1)$, $G(1;0;1)$, $H(1;1;1)$, $O\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

b) $\left(A;\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)$

$A(0;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;1;1)$, $D(0;0;1)$, $E(1;0;0)$

$F(1;1;0)$, $G(1;1;1)$, $H(1;0;1)$, $O\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

c) $\left(O;\overrightarrow{OF};\overrightarrow{OG};\overrightarrow{OE}\right)$

$\rightarrow \overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{DG}$ et $\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{DA}$

$\rightarrow \overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{DC}$

$\rightarrow \overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OG}$ donc $A(0;-1;0)$

$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{OF}-\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OE}\right)=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OE}$ donc $B(1;-1;-1)$

$\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OE}$ donc $C(0;0;-1)$

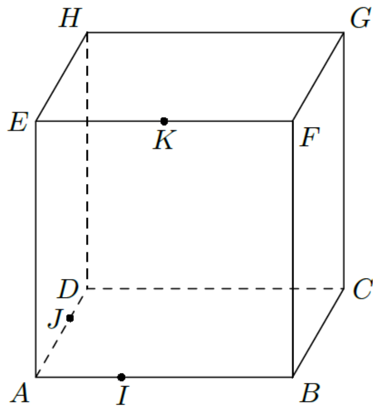
$\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OF}$ donc $D(-1;0;0)$

Exercice 4B.3 :

On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-contre et les trois points définis par :

- *le point K est le milieu de* $[EF]$ *;*
- *le point I vérifie la relation* $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ *;*
- *le point J vérifie la relation* $\overrightarrow{AJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

En utilisant le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$*, montrer que les droites* (IJ) *et* (KH) *sont parallèles.*



Dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$, on obtient les coordonnées suivantes :

$I\left(\frac{1}{3};0;0\right)$, $J\left(0;\frac{2}{3};0\right)$, $K\left(\frac{1}{2};0;1\right)$ et $H(0;1;1)$.

Ainsi : $\overrightarrow{IJ}\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3};0\right)$ et $\overrightarrow{KH}\left(-\frac{1}{2};1;0\right)$

Une relation de proportionnalité apparait :

$$\overrightarrow{KH}=\frac{3}{2}\overrightarrow{IJ}$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{KH}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires et les droites (IJ) et (KH) sont parallèles.

Sans repère, on obtient :

$$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{KH}=\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{EH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}$$

Ainsi : $\overrightarrow{KH}=\frac{3}{2}\overrightarrow{IJ}$