Sphère et boule (hors programme)

Exercice 6.1 :

Trouver l'équation de la sphère de diamètre $[AB]$ avec $A(2;-3;5)$ et $B(-1;5;4)$.

Exercice 6.2 :

Déterminer le centre et le rayon de la sphère S dont une équation est :

1) $x^2+y^2+z^2-2x-8z+3=0$
2) $x^2+y^2+z^2+2x-4y+5z=0$

Exercice 6.3 :

Soit $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ un repère orthonormal direct de l'espace

Les points A, B, C sont définis par : $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{i}+\vec{j}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

1) Montrer que les plans (OAB) et (ABC) sont perpendiculaires.
2) a) Déterminer des équations des plans médiateurs des segments [OA], [OB] et [OC].
   b) En déduire le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre OABC et le rayon de cette sphère.

Conseil : pour le 1) , on pourra montrer que des vecteurs normaux respectivement à (OAB) et (ABC) sont orthogonaux

Exercice 6.4 :

Soit A, B, C trois points non alignés de l'espace et I le point défini par $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

1) De quels coefficients a, b, c faut-il affecter respectivement les points A, B, C pour que I soit leur barycentre ?
2) Dans un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, on suppose que A, B, C ont pour coordonnées respectives : $(-1;0;0)$, $(0;-\sqrt{3};1)$ et $(5;\sqrt{3};2)$

a) Vérifier que les points A, B, C ne sont pas alignés et déterminer les coordonnées de I.
b) Montrer que le triangle ABC est rectangle en B.
c) Déterminer l'ensemble E des points $M(x;y;z)$ de l'espace tels que : $MA^2-2MB^2-MC^2=-14$ et donner les éléments caractéristiques de l'ensemble E

Exercice 6.5 :

L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

On considère les points $A(-1;2;1)$, $B(1;-6;-1)$, $C(2;2;2)$ et $I(0;1;-1)$.

1) Déterminer une équation cartésienne du plan P contenant les points A, B, C.
2) Soit Q le plan d'équation : $x+y-3z+2=0$, et Q' le plan de repère $\left(O;\vec{i};\vec{k}\right)$.
   a) Pourquoi Q et Q' sont-ils sécants ?
   b) Donner un point E et un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d'intersection Δ des plans Q et Q'.
3) Ecrire une équation cartésienne de la sphère S de centre I et de rayon 2.
4) On considère les points $J(-2;0;0)$ et $K(1;0;1)$.

   Déterminer l'intersection de la sphère S et de la droite (JK).

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 6.1 :

Trouver l'équation de la sphère de diamètre $[AB]$ *avec* $A(2;-3;5)$ *et* $B(-1;5;4)$.

La sphère est constituée de tous les points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y+3\\z-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x+1\\y-5\\z-4\end{pmatrix}$ soient orthogonaux :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0 &\Leftrightarrow (x-2)(x+1)+(y+3)(y-5)+(z-5)(z-4)=0\\ &\Leftrightarrow x^2+x-2x-2+y^2-5y+3y-15+z^2-4z-5z+20=0\\ &\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-x-2y-9z+3=0\end{aligned}$$

Exercice 6.2 :

Déterminer le centre et le rayon de la sphère S dont une équation est :

$$x^2+y^2+z^2-2x-8z+3=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2-1+y^2+(z-4)^2-16+3=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+(z-4)^2=14$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+(z-4)^2=\left(\sqrt{14}\right)^2$$

Sphère de centre $\Omega(1;0;4)$ **et de rayon R =** $\sqrt{14}$

$$x^2+y^2+z^2+2x-4y+5z=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2-1+(y-2)^2-4+\left(z+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2+\left(z+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{45}{4}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2+\left(z+\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

Sphère de centre $\Omega\left(-1;2;-\frac{5}{2}\right)$ **de rayon R =** $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

Exercice 6.3 :

Soit $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ *un repère orthonormal direct de l'espace*

Les points A, B, C sont définis par : $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{i}+\vec{j}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

1) *Montrer que les plans (OAB) et (ABC) sont perpendiculaires.*

$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ → soit $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur normal à (OAB) :

$\begin{cases}\overrightarrow{OA}.\vec{n}=0\\ \overrightarrow{OB}.\vec{n}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2a=0\\ a+b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=0\\ b=0\end{cases}$ donc $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (OAB)

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ → soit $\vec{n'}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur normal à (OAB) :

$\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\vec{n'}=0\\ \overrightarrow{AC}.\vec{n'}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-a+b=0\\ -a+b+c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=b\\ c=0\end{cases}$ donc $\vec{n'}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (ABC)

Or $\vec{n}.\vec{n'}=1\times0+1\times0+0\times1=0$: les vecteurs normaux sont orthogonaux entre eux et les **plans (OAB) et (ABC) sont perpendiculaires**.

2) ***a)*** *Déterminer des équations des plans médiateurs des segments [OA], [OB] et [OC].*

$\overrightarrow{OA}$ est un vecteur normal au plan médiateur π_1 de [OA] d'où : $\pi_1 : 2x+d=0$, $d\in\mathbb{R}$

Or le milieu $I(1;0;0)$ de [OA] appartient à π_1 d'où : $2+d=0$ soit $d=-2$ ainsi :

$$\boldsymbol{\pi_1} : 2x-2=0 \quad \text{soit : } x-1=0$$

$\overrightarrow{OB}$ est un vecteur normal au plan médiateur π_2 de [OB] d'où : $\pi_2 : x+y+d=0$, $d\in\mathbb{R}$

Or le milieu $J\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$ de [OB] appartient à π_2 d'où : $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+d=0$ soit $d=-1$ ainsi :

$$\boldsymbol{\pi_2} : x+y-1=0$$

$\overrightarrow{OC}$ est un vecteur normal au plan médiateur π_3 de [OC] d'où : $\pi_3 : x+y+z+d=0$, $d\in\mathbb{R}$

Or le milieu $K\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ de [OC] appartient à π_3 d'où : $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+d=0$ soit $d=-\frac{3}{2}$ ainsi :

$$\boldsymbol{\pi_3} : x+y+z-\frac{3}{2}=0$$

b) *En déduire le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre OABC et le rayon de cette sphère*

Le centre de la sphère est Ω le point d'intersection des trois plans médiateurs, soit :

$$\begin{cases} x-1=0 \\ x+y-1=0 \\ x+y+z-\frac{3}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-x+1=0 \\ z=-x-y+\frac{3}{2}=\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{soit : } \Omega\left(1;0;\frac{1}{2}\right)$$

Le rayon R est $\Omega A = \sqrt{(2-1)^2+0^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Exercice 6.4 :

Soit A, B, C trois points non alignés de l'espace et I le point défini par $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

1) *De quels coefficients a, b, c faut-il affecter respectivement les points A, B, C pour que I soit leur barycentre, c'est-à-dire tels que : $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}$?*

$$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AI}+\frac{1}{2}\overrightarrow{IC} \Leftrightarrow \vec{0}=\overrightarrow{IB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AI}+\frac{1}{2}\overrightarrow{IC}$$

Ainsi : $-\frac{1}{2}\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

I est le barycentre de $(A;-1)$, $(B;2)$, $(C;1)$.

2) *Dans un repère orthonormal direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on suppose que A, B, C ont pour coordonnées respectives :*

$(-1;0;0)$, $(0;-\sqrt{3};1)$ *et* $(5;\sqrt{3};2)$

a) *Vérifier que les points A, B, C ne sont pas alignés et déterminer les coordonnées de I.*

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{3}\\1\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\\sqrt{3}\\2\end{pmatrix}$$: ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires

donc **les points A, B, C ne sont pas alignés**

I est le barycentre de $(A;-1)$, $(B;2)$, $(C;1)$ donc : $\overrightarrow{OI}=\dfrac{-\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{-1+2+1}=\dfrac{-\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}$

donc $\begin{cases} x_{\mathrm{I}} = \dfrac{-x_{\mathrm{A}} + 2x_{\mathrm{B}} + x_{\mathrm{C}}}{2} = 2 \\ y_{\mathrm{I}} = \dfrac{-y_{\mathrm{A}} + 2y_{\mathrm{B}} + y_{\mathrm{C}}}{2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ z_{\mathrm{I}} = \dfrac{-z_{\mathrm{A}} + 2z_{\mathrm{B}} + z_{\mathrm{C}}}{2} = 2 \end{cases}$ soit $\mathrm{I}\left(2;-\dfrac{\sqrt{3}}{2};2\right)$

b) *Montrer que le triangle ABC est rectangle en B.*

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{3}\\ -1\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{BC}}\begin{pmatrix}5\\ 2\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{BA}}.\overrightarrow{\mathrm{BC}} = -1\times5+\sqrt{3}\times2\sqrt{3}-1\times1 = -5+6-1 = 0$$

donc $\overrightarrow{\mathrm{BA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ et **le triangle ABC est rectangle en B**

c) *Déterminer l'ensemble E des points* $\mathrm{M}(x;y;z)$ *de l'espace tels que :* $\mathrm{MA}^2 - 2\mathrm{MB}^2 - \mathrm{MC}^2 = -14$ *et donner les éléments caractéristiques de l'ensemble E*

Pour tout point M de l'espace, on a :

$$\mathrm{MA}^2 - 2\mathrm{MB}^2 - \mathrm{MC}^2 = \overrightarrow{\mathrm{MA}}^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{MB}}^2 - \overrightarrow{\mathrm{MC}}^2 = \left(\overrightarrow{\mathrm{MI}}+\overrightarrow{\mathrm{IA}}\right)^2 - 2\left(\overrightarrow{\mathrm{MI}}+\overrightarrow{\mathrm{IB}}\right)^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{MI}}+\overrightarrow{\mathrm{IC}}\right)^2$$
$$= \mathrm{MI}^2 + \mathrm{IA}^2 - 2\mathrm{MI}^2 - 2\mathrm{IB}^2 - \mathrm{MI}^2 - \mathrm{IC}^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{MI}}.\left(\overrightarrow{\mathrm{IA}} - 2\overrightarrow{\mathrm{IB}} - \overrightarrow{\mathrm{IC}}\right)$$

Or I est le barycentre de $(\mathrm{A};-1)$, $(\mathrm{B};2)$, $(\mathrm{C};1)$ soit $\overrightarrow{\mathrm{IA}} - 2\overrightarrow{\mathrm{IB}} - \overrightarrow{\mathrm{IC}} = \vec{0}$

Ainsi : $\mathrm{MA}^2 - 2\mathrm{MB}^2 - \mathrm{MC}^2 = -2\mathrm{MI}^2 + \mathrm{IA}^2 - 2\mathrm{IB}^2 - \mathrm{IC}^2$

Or $\overrightarrow{\mathrm{IA}}\begin{pmatrix}3\\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ 2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{IB}}\begin{pmatrix}2\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ -1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{IC}}\begin{pmatrix}-3\\ -3\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ 0\end{pmatrix}$

donc $\mathrm{IA}^2 = 9 + \dfrac{3}{4} + 4 = \dfrac{55}{4}$, $\mathrm{IB}^2 = 4 + \dfrac{3}{4} + 1 = \dfrac{23}{4}$ et $\mathrm{IC}^2 = 9 + \dfrac{27}{4} = \dfrac{63}{4}$

ainsi : $\mathrm{MA}^2 - 2\mathrm{MB}^2 - \mathrm{MC}^2 = -2\mathrm{MI}^2 + \dfrac{55}{4} - 2\times\dfrac{23}{4} - \dfrac{63}{4} = -2\mathrm{MI}^2 - \dfrac{54}{4} = -2\mathrm{MI}^2 - \dfrac{27}{2}$

On cherche donc les points M tels que :

$$-2\mathrm{MI}^2 - \frac{27}{2} = -14 \Leftrightarrow -2\mathrm{MI}^2 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \mathrm{IM}^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \mathrm{IM} = \frac{1}{2}$$

E est la sphère de centre I et de rayon $\frac{1}{2}$

Exercice 6.5 :

L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O};\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

On considère les points $\mathrm{A}(-1;2;1)$, $\mathrm{B}(1;-6;-1)$, $\mathrm{C}(2;2;2)$ *et* $\mathrm{I}(0;1;-1)$.

1) *Déterminer une équation cartésienne du plan P contenant les points A, B, C.*

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}2\\ 8\\ -2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{pmatrix}3\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$: ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur normal à (ABC) : $\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\vec{n}=0\\\overrightarrow{AC}.\vec{n}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2a+8b-2c=0\\3a+c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=\dfrac{a-c}{4}=a\\c=-3a\end{cases}$

donc $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P et le plan P peut s'écrire : $x+y-3z+d=0$, $d\in\mathbb{R}$

Or $A\in P$ donc : $-1+2-3\times1+d=0 \Leftrightarrow d=2$ et le plan P peut s'écrire : $x+y-3z+2=0$

2) *Soit Q le plan d'équation :* $x+y-3z+2=0$, *et Q' le plan de repère* $\left(O;\vec{i};\vec{k}\right)$.

a) *Pourquoi Q et Q' sont-ils sécants ?*

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{n'}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ des vecteurs normaux à Q et à Q' :

$\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires donc **Q et Q' sont sécants**

b) *Donner un point E et un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d'intersection Δ des plans Q et Q'*

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de la droite Δ, alors : $\begin{cases}\vec{u}.\vec{n}=0\\\vec{u}.\vec{n'}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y-3z=0\\y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3z\\y=0\end{cases}$

Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite Δ

Un point E appartenant à la fois à Q et à Q' vérifie : $\begin{cases}x_E+y_E-3z_E+2=0\\y_E=0\end{cases} \Leftrightarrow x_E-3z_E+2=0$

Prenons le point $E(1;0;1)$.

3) *Ecrire une équation cartésienne de la sphère S de centre I et de rayon 2.*

S : $(x-x_I)^2+(y-y_I)^2+(z-z_I)^2=2^2$

$x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=4$

4) *On considère les points* $J(-2;0;0)$ *et* $K(1;0;1)$.

Déterminer l'intersection de la sphère S et de la droite (JK)

$\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{JK}=\vec{u}$ De plus, K = E donc les droites (JK) et Δ sont confondues.

On cherche l'ensemble des points appartenant à la sphère S et à $\Delta=Q\cap Q'$:

$$\begin{cases}x+y-3z+2=0 \quad (Q)\\y=0 \quad (Q')\\x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=4 \quad (S)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3z-2\\y=0\\(3z-2)^2+1+(z+1)^2=4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=3z-2\\y=0\\9z^2-12z+4+1+z^2+2z+1=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3z-2\\y=0\\10z^2-10z+2=0\end{cases} \rightarrow \Delta=20$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3z - 2 \\ y = 0 \\ z = \dfrac{10-\sqrt{20}}{20} = \dfrac{5-\sqrt{5}}{10} \quad ou \quad z = \dfrac{5+\sqrt{5}}{10} \end{cases}$$

Les points d'intersection de (JK) et S sont : $\left(\dfrac{-5-3\sqrt{5}}{10};0;\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}\right)$ et $\left(\dfrac{-5+3\sqrt{5}}{10};0;\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}\right)$