Plan médiateur d'un segment

Exercice 7.1 :

Trouver l'équation du plan médiateur au segment $[CD]$ avec $C(3;-5;-7)$ et $D(5;2;-4)$.

Exercice 7.2 :

Trouver l'équation du plan médiateur au segment $[AF]$ avec $A(5;3;-9)$ et $F(-8;-1;7)$.

Exercice 7.3 :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal, on considère les points $A(-1;0;1)$ et $B(0;3;1)$

Déterminer une équation cartésienne du plan π médiateur du segment [AB].

Exercice 7.1

Trouver l'équation du plan médiateur au segment $[\mathrm{CD}]$ *avec* $\mathrm{C}(3;-5;-7)$ et $\mathrm{D}(5;2;-4)$.

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{CD}}(2;7;3)$ est un vecteur normal au plan médiateur de $[\mathrm{CD}]$.

Première méthode :

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ donnent les premiers coefficients de l'équation du plan (P) cherchée :

$$2x+7y+3z+d=0$$

Or I milieu de $[\mathrm{CD}]$ appartient à ce plan (P)

$$\mathrm{I}\left(4;-\frac{3}{2};-\frac{11}{2}\right)$$

Donc :

$$2\times 4+7\times\left(-\frac{3}{2}\right)+3\times\left(-\frac{11}{2}\right)+d=0$$

$$\Leftrightarrow\ 8-27+d=0$$

$$\Leftrightarrow\ d=19$$

On obtient l'équation du plan (P) :

$$2x+7y+3z+19=0$$

Deuxième méthode :

Le plan (P) est constitué de tous les points $\mathrm{M}(x;y;z)$ à égale distance de C et de D :

$$\mathrm{CM}^2=\mathrm{DM}^2$$

$$\Leftrightarrow\ (x-3)^2+(y+5)^2+(z+7)^2=(x-5)^2+(y-2)^2+(z+4)^2$$

$$\Leftrightarrow\ x^2-6x+9+y^2+10y+25+z^2+14z+49=x^2-10x+25+y^2-4y+4+z^2+8z+16$$

$$\Leftrightarrow\ -6x+10y+14z+83=-10x-4y+8z+45$$

$$\Leftrightarrow\ -6x+10y+14z+83+10x+4y-8z-45=0$$

$$\Leftrightarrow\ 4x+14y+6z+38=0$$

$$\Leftrightarrow\ 2x+7y+3z+19=0$$

Exercice 7.2 :

Trouver l'équation du plan médiateur au segment $[\mathrm{AF}]$ *avec* $\mathrm{A}(5;3;-9)$ et $\mathrm{F}(-8;-1;7)$.

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AF}}(-13;-4;16)$ est un vecteur normal au plan médiateur de $[\mathrm{AF}]$.

Première méthode :

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ donnent les premiers coefficients de l'équation du plan (P) cherchée :

$$-13x-4y+16z+d=0$$

Or I milieu de $[\mathrm{AF}]$ appartient à ce plan (P)

$$\mathrm{I}\left(-\frac{3}{2};1;-1\right)$$

Donc : $$-13\times\left(-\frac{3}{2}\right)-4\times 1+16\times(-1)+d=0$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{39}{2}-4-16+d=0$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{39}{2}-\frac{40}{2}+d=0\ \Leftrightarrow\ d=\frac{1}{2}$$

On obtient l'équation du plan (P) :

$$-13x-4y+16z+\frac{1}{2}=0 \iff -26x-8y+32z+1=0$$

Deuxième méthode :

Le plan (P) est constitué de tous les points $M(x;y;z)$ à égale distance de A et de F :

$$\begin{aligned}
& AM^2=FM^2 \\
\iff & (x-5)^2+(y-3)^2+(z+9)^2=(x+8)^2+(y+1)^2+(z-7)^2 \\
\iff & x^2-10x+25+y^2-6y+9+z^2+18z+81=x^2+16x+64+y^2+2y+1+z^2-14z+49 \\
\iff & -10x-6y+18z+115=16x+2y-14z+114 \\
\iff & -10x-6y+18z+115-16x-2y+14z-114=0 \\
\iff & -26x-8y+32z+1=0
\end{aligned}$$

Exercice 7.3 :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal, on considère les points $A(-1;0;1)$ *et* $B(0;3;1)$

Déterminer une équation cartésienne du plan π médiateur du segment [AB].

Le plan π est perpendiculaire à (AB) donc $\overrightarrow{AB}(1;3;0)$ est un vecteur normal à π donc une équation cartésienne de ce plan est de la forme :

$$\pi :\ x+3y+d=0\ ,\ d\in\mathbb{R}$$

Le milieu $I\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2};1\right)$ de $[AB]$ appartient au plan π d'où :

$$-\frac{1}{2}+\frac{9}{2}+d=0 \quad \text{ainsi} \quad d=-4$$

et $\quad \boldsymbol{\pi :}\ x+3y-4=0$