# Intersection de deux plans

## Exercice 9.1 :

Déterminer l'intersection entre le plan $(P)$ d'équation $3x-y+2z-3=0$ et le plan $(Q)$ d'équation $-x+4y+3z+1=0$.

## Exercice 9.2 :

On donne les plans $P_1$ d'équation : $2x+3z+3=0$ et $P_2$ d'équation : $x-2y-z-7=0$.

1) Ces deux plans sont-ils parallèles ?
2) S'ils ne le sont pas, donner une équation paramétrique de leur droite d'intersection de deux manières différentes.
3) On donne un plan $P_3$ d'équation : $2x+y+2z-4=0$.

   Quelles sont les coordonnées du point d'intersection de ces trois plans (de deux manières différentes) ?

## Exercice 9.3 :

1) Trouver deux points communs aux deux plans sécants $(P)$ d'équation $2x+y+z+3=0$ et $(Q)$ d'équation $x-2y-z-7=0$.
2) En déduire une équation paramétrique de la droite d'intersection à ces deux plans.

**Exercice 9.1 :**

*Déterminer l'intersection entre le plan* $(P)$ *d'équation* $3x-y+2z-3=0$ *et le plan* $(Q)$ *d'équation* $-x+4y+3z+1=0$.

On doit d'abord étudier la position relative des deux plans en comparant leurs vecteurs normaux respectifs :

$\overrightarrow{n_P}(3;-1;2)$ et $\overrightarrow{n_Q}(-1;4;3)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{n_P}$ et $\overrightarrow{n_Q}$ ne sont pas proportionnels et ne sont donc pas colinéaires

→les plans $(P)$ et $(Q)$ ne sont pas parallèles

→leur intersection est une droite à déterminer.

Pour déterminer l'ensemble des points $\mathrm{M}(x;y;z)$ appartenant aux deux plans, on doit résoudre le système :

$$\begin{cases}\mathrm{M}\in(P)\\ \mathrm{M}\in(Q)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x-y+2z-3=0\\ -x+4y+3z+1=0\end{cases}$$

Deux équations pour trois inconnues, il faut déterminer une des trois variables qui va jouer le rôle de paramètre :

On pose : $z=t$.

Le système devient :

$$\begin{cases}3x-y=3-2t\\ -x+4y=-1-3t\\ z=t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix}4L_1\\ L_2\\ L_3\end{vmatrix}\begin{cases}12x-4y=12-8t\\ -x+4y=-1-3t\\ z=t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix}L_1+L_2\\ L_2\\ L_3\end{vmatrix}\begin{cases}11x=11-11t\\ -x+4y=-1-3t\\ z=t\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=1-t\\ 4y=-1-3t+x\\ z=t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1-t\\ y=\frac{1}{4}(-1-3t+1-t)\\ z=t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1-t\\ y=-t\\ z=t\end{cases}.$$

La droite cherchée passe par le point $\mathrm{A}(1;0;0)$ et possède un vecteur directeur égal à $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

**Exercice 9.2 :**

On donne les plans $P_1$ d'équation : $2x+3z+3=0$ et $P_2$ d'équation : $x-2y-z-7=0$.

1) *Ces deux plans sont-ils parallèles ?*

Les deux vecteurs normaux de ces plans sont $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$

Les vecteurs ne sont pas colinéaires donc les plans ne sont pas parallèles.

2) *S'ils ne le sont pas, donner une équation paramétrique de leur droite d'intersection.*

**1ère méthode :** On cherche l'ensemble des points appartenant aux deux plans, donc vérifiant :

$$\begin{cases}2x+3z+3=0\\ x-2y-z-7=0\end{cases} \quad \rightarrow \text{on pose : } x=t \quad \rightarrow \begin{cases}x=t\\ 2t+3z+3=0\\ t-2y-z-7=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} x = t \\ 3z = -3-2t \\ 2y = t-z-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ z = -1-\frac{2}{3}t \\ 2y = t-\left(-1-\frac{2}{3}t\right)-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ z = -1-\frac{2}{3}t \\ 2y = t+1+\frac{2}{3}t-7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ z = -1-\frac{2}{3}t \\ 2y = \frac{5}{3}t-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -3+\frac{5}{6}t \\ z = -1-\frac{2}{3}t \end{cases}$$

**2ème méthode :** Le vecteur directeur de cette droite d'intersection $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est orthogonal aux deux vecteurs normaux des plans, donc :

$$\begin{cases} \vec{u}.\vec{n_1} = 0 \\ \vec{u}.\vec{n_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+3c = 0 \\ a-2b-c = 0 \end{cases}$$

2 équations à 3 inconnues : il faut poser la valeur d'une des variables, il est judicieux de poser :

$a = 3$

Ainsi :

$$\begin{cases} 2\times3+3c = 0 \\ 3-2b-c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3c = -6 \\ -2b-c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -\frac{6}{3} = -2 \\ -2b = -3+c = -3-2 = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 3 \\ c = -2 \\ b = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2} \end{cases} \quad \text{d'où : } \vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ \frac{5}{2} \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et en multipliant par 2 : } \vec{u'}\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Il faut maintenant trouver un point simple et intuitif appartenant à ces deux plans :

Par exemple, le point d'abscisse 0 et d'altitude $-1$ appartient au plan $P_1$.

$$\begin{cases} 2x+3z+3 = 0 \\ x-2y-z-7 = 0 \end{cases}$$

On reporte ces informations dans l'équation du plan $P_2$ :

$$\begin{aligned} & 0-2y-(-1)-7 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & -2y+1-7 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & -2y-6 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & y = \frac{6}{-2} = -3 \end{aligned}$$

D'où le point $D(0;-3;-1)$

L'équation de cette droite d'intersection est : $\begin{cases} x = 0 + 6k \\ y = -3 + 5k \ , \ k \in \mathbb{R} \\ z = -1 - 4k \end{cases}$

**3)** *On donne un plan $P_3$ d'équation : $2x + y + 2z - 4 = 0$.*

*Quelles sont les coordonnées du point d'intersection de ces trois plans ?*

**1ère méthode :** Un vecteur normal de ce plan est : $\overrightarrow{n_3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{n_3}.\overrightarrow{u'} = 2\times 6 + 1\times 5 + 2\times(-4) = 12 + 5 - 8 = 9$$

$\overrightarrow{n_3}.\overrightarrow{u'} \neq 0$ donc cette droite et le plan $P_3$ ne sont pas parallèles.

Le point d'intersection S cherché vérifie :

Il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x = 0 + 6k \\ y = -3 + 5k \\ z = -1 - 4k \\ 2x + y + 2z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 + 6k \\ y = -3 + 5k \\ z = -1 - 4k \\ 2\times 6k + (-3 + 5k) + 2(-1 - 4k) - 4 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \ 12k - 3 + 5k - 2 - 8k - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ 9k - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ k = 1$$

D'où : $\begin{cases} x = 0 + 6\times 1 = 6 \\ y = -3 + 5\times 1 = 2 \\ z = -1 - 4\times 1 = -5 \end{cases}$ Le point cherché est le point $S(6;2;-5)$.

**2ème méthode :** On doit résoudre le système : $\begin{cases} 2x + 3z + 3 = 0 \\ x - 2y - z - 7 = 0 \\ 2x + y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3z + 3 = 0 \\ x - 2y - z - 7 = 0 \\ 4x + 2y + 4z - 8 = 0 \end{cases} \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 + L_3 \\ L_3 \end{vmatrix} \begin{cases} 2x + 3z + 3 = 0 \\ 5x + 3z - 15 = 0 \\ 4x + 2y + 4z - 8 = 0 \end{cases} \begin{vmatrix} L'_1 \\ L'_2 \\ L'_3 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} L'_1 \\ L'_2 - L'_1 \\ L'_3 \end{vmatrix} \begin{cases} 2x + 3z + 3 = 0 \\ 3x - 18 = 0 \\ 4x + 2y + 4z - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\times \mathbf{6} + 3z + 3 = 0 \\ x = \dfrac{18}{3} = \mathbf{6} \\ 4\times \mathbf{6} + 2y + 4z - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3z = -15 \\ x = 6 \\ 24 + 2y + 4z - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\dfrac{15}{3} = \mathbf{-5} \\ x = 6 \\ 2y + 4\times(\mathbf{-5}) = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -5 \\ x = 6 \\ 2y = 20 - 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=-5 \\ x=6 \\ y=\dfrac{4}{2}=2 \end{cases}$$

Le point cherché est le point $S(6;2;-5)$.

**Exercice 9.3 :**

1) *Trouver un point commun aux deux plans sécants $(P)$ d'équation $2x+y+z+3=0$ et $(Q)$ d'équation $x-2y-z-7=0$.*

$$\begin{cases} 2x+y+z+3=0 \\ x-2y-z-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-2x-y-3 \\ z=x-2y-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-2x-y-3 \\ -2x-y-3=x-2y-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-2x-y-3 \\ y=3x+10 \end{cases}$$

Premier point d'intersection :

On pose : $x=0$
Ainsi : $y=3\times 0+10=10$
Et $z=-10-3=-13$
On obtient un premier point de coordonnées $\mathrm{A}(0;10;-13)$.

Deuxième point d'intersection :

On pose : $x=-3$
Ainsi : $y=3\times(-3)+10=1$
Et $z=-2\times(-3)-1-3=2$
On obtient un second point de coordonnées $\mathrm{B}(-3;1;2)$.

2) *En déduire une équation paramétrique de la droite d'intersection à ces deux plans.*

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ 15 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite cherchée passant par le point A.

Une équation paramétrique est :

$$\begin{cases} x=-3k \\ y=10-9k \\ z=-13+15k \end{cases}, \ k\in\mathbb{R}$$