Exercices bilan de Géométrie dans l'espace – Notre Dame de La Merci

Exercice 10.1 :

Soit ABCD un tétraèdre et G le point défini par : $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

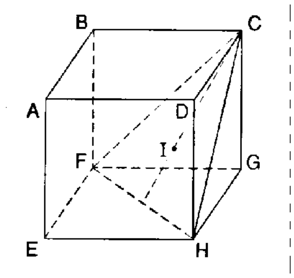
En exprimant G comme barycentre de (B,b), (C,c), (D,d), prouver l'appartenance de G au plan (BCD)

Conseil : après avoir défini b, c, d, on pourra utiliser la traduction vectorielle d'un plan

Exercice 10.2 :

Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1 et I le centre de gravité du triangle CFH

1) Montrer que CFH est équilatéral.
2) Prouver que les points A, G et I sont dans le plan médiateur de [CH] et aussi dans le plan médiateur de [CF].
3) En déduire que la droite (AG) est orthogonale au plan (CFH) et qu'elle passe par I.



Exercice 10.3 :

Soit $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ une base orthonormale directe de l'espace

Soit les vecteurs $\vec{u}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}+\vec{k})$, $\vec{v}=\frac{\sqrt{3}}{3}(-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$, $\vec{w}=\frac{\sqrt{6}}{6}(-\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k})$

1) *La base $(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ est-elle orthonormale ?*
2) Calculer $\vec{u}\wedge\vec{v}$. la base $(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ est-elle directe ?

Conseil : . une base est orthonormale si et seulement si les vecteurs sont de norme 1 (unitaires) et orthogonaux deux à deux

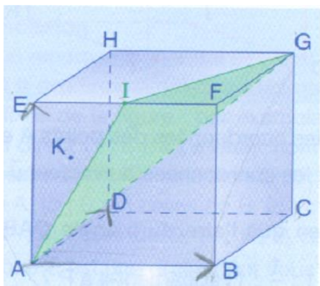
. pour montrer que $(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ est orthonormale et directe , il faut et il suffit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux et que $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$

Exercice 10.4 :

Soit ABCDEFGH un cube de repère orthonormal direct $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$

Soit I le milieu de [EF] et K le centre du carré ADHE

1) Calculer l'aire du triangle IGA.
2) Calculer le volume du tétraèdre ABIG.
   En déduire la distance du point B au plan (AIG)

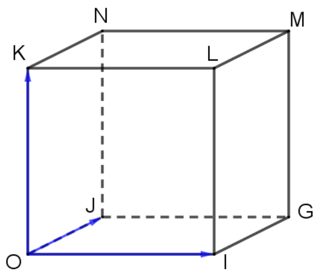


Exercice 10.5 :

Soit OIGJKLMN un cube de repère orthonormal $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OK})$

Soit A le milieu de $[IL]$, B le point défini par $\overrightarrow{KB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{KN}$, et soit P le plan (OAB)

1) a) Préciser les coordonnées des points A et B ;
   b) Calculer l'aire du triangle OAB
   c) Le point $C\left(1;\frac{1}{3};1\right)$ appartient-il à P ?
2) On considère le tétraèdre OABK ; montrer que son volume est égal à $\frac{1}{9}$.
   En déduire la distance du point K au plan P



Exercice 10.1 :

On a : $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AD}\right)$

Donc G est le barycentre de (B , 1) , (C , 2) , (D , 3).

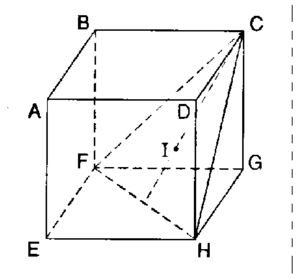
Ainsi : $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{5}{6}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$$=\frac{2}{6}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{6}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$$

Le point **G appartient au plan (BCD)**.

Exercice 10.2 :

Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1 et I le centre de gravité du triangle CFH



1) *Montrer que CFH est équilatéral.*

Les côtés [CF] , [CH] et [FH] sont des diagonales de faces du cube d'arête 1

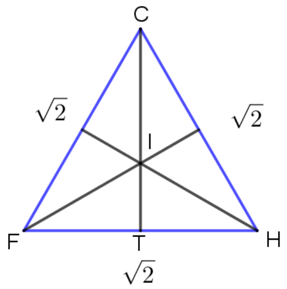
Donc CFH est **équilatéral**.

2) *Prouver que les points A, G et I sont dans le plan médiateur de [CH] et aussi dans le plan médiateur de [CF].*

Par Pythagore : AC = AH = $\sqrt{2}$ et AC = AF = $\sqrt{2}$

Donc **A est sur les plans médiateurs de [CH] et [CF]**

GC = GH = 1 = GF et IC = IH = $\frac{\sqrt{3}}{6}$ = IF



FTC triangle rectangle en T, théorème de Pythagore :

$$FT^2+TC^2=FC^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+TC^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}+TC^2=2$$

$$\Leftrightarrow TC^2=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow TC=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Le centre de gravité est aux deux-tiers des médianes :

$$CI=\frac{2}{3}CT=\frac{2}{3}\times\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

De même : $HI=\frac{\sqrt{6}}{3}$

Donc **I est sur le plan médiateur de [CH] , de même il est aussi sur le plan médiateur de [CF].**

3) *En déduire que la droite (AG) est orthogonale au plan (CFH) et qu'elle passe par I.*

D'après le 2) , on a : (AG) $\perp$ (CH) et (AG) $\perp$ (CF) donc **(AG) $\perp$ (CFH)**

De même : (AI) $\perp$ (CH) et (AI) $\perp$ (CF) donc **(AI) $\perp$ (CFH)**

Ainsi : **$I \in (AG)$**

Autre approche :

Le plan médiateur d'un segment est un plan orthogonal à ce segment passant par son milieu.

Donc $(AG) \perp (CFH)$

Et le plan (CFH) passe par le milieu du segment $[AG]$.

Exercice 10.3 :

Soit $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ une base orthonormale directe de l'espace

Soit les vecteurs $\vec{u}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}+\vec{k})$, $\vec{v}=\frac{\sqrt{3}}{3}(-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$, $\vec{w}=\frac{\sqrt{6}}{6}(-\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k})$

1) La base $(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ est-elle orthonormale ?

$$\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix},\ \vec{v}\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}\text{ et }\vec{w}\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{6}\\-\frac{\sqrt{6}}{3}\\\frac{\sqrt{6}}{6}\end{pmatrix}$$

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=1$$

$$\|\vec{v}\|=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{9}+\frac{3}{9}+\frac{3}{9}}=1$$

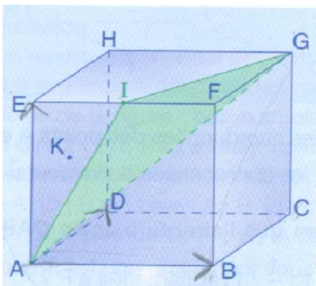
$$\|\vec{w}\|=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{6}{9}+\frac{1}{6}}=\sqrt{\frac{18}{18}}=1$$

$$\vec{u}.\vec{v}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}+0\times\frac{\sqrt{3}}{3}=0 \qquad \vec{u}.\vec{w}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{6}=0$$

$$\vec{v}.\vec{w}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\times\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}\times\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{18}}{18}-\frac{\sqrt{18}}{9}+\frac{\sqrt{18}}{18}=0$$

Ainsi la base $(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ est orthonormale

Exercice 10.4 :



Soit ABCDEFGH un cube de repère orthonormal direct $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$

Soit I le milieu de [EF] et K le centre du carré ADHE

1) *Calculer l'aire du triangle IGA.*
2) *Calculer le volume du tétraèdre ABIG.*
   En déduire la distance du point B au plan (AIG)

1) Calculer l'aire du triangle IGA.

Dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$, les coordonnées des points sont :

$A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;0;1)$, $F(1;0;1)$, $G(1;1;1)$, $I\left(\frac{1}{2};0;1\right)$, $K\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

→en effet : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\times\overrightarrow{AB}+0\times\overrightarrow{AD}+1\times\overrightarrow{AE}$.

Soit P le projeté orthogonal du point I sur la droite (AG).

→Aire du triangle IGA : $\frac{1}{2}\text{AG}\times\text{IP}$ or $\overrightarrow{\text{AG}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc $\text{AG}=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$.

Equation paramétrique de la droite (AG) :

$$\text{M}\in(\text{AG}) \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{AM}}=k\times\overrightarrow{\text{AG}},k\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases}x=k\\y=k\ ,k\in\mathbb{R}\\z=k\end{cases}$$

Le point P appartient à la droite (AG) et les vecteurs $\overrightarrow{\text{IP}}\left|\begin{matrix}x-\frac{1}{2}\\y\\z-1\end{matrix}\right.$ et $\overrightarrow{\text{AG}}$ sont orthogonaux :

$$\begin{cases}x_\text{P}=k\\y_\text{P}=k\\z_\text{P}=k\\\left(x_\text{P}-\frac{1}{2}\right)\times1+y_\text{P}\times1+(z_\text{P}-1)\times1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_\text{P}=k\\y_\text{P}=k\\z_\text{P}=k\\x_\text{P}-\frac{1}{2}+y_\text{P}+z_\text{P}-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_\text{P}=k\\y_\text{P}=k\\z_\text{P}=k\\k-\frac{1}{2}+k+k-\frac{3}{2}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x_\text{P}=k\\y_\text{P}=k\\z_\text{P}=k\\3k-\frac{3}{2}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_\text{P}=k\\y_\text{P}=k\\z_\text{P}=k\\k=\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_\text{P}=\frac{1}{2}\\y_\text{P}=\frac{1}{2}\\z_\text{P}=\frac{1}{2}\\k=\frac{1}{2}\end{cases}$$

d'où le point $\text{P}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Ainsi : $\overrightarrow{\text{IP}}\left|\begin{matrix}0\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{matrix}\right.$ et $\text{IP}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

L'aire du triangle IGA est : $\frac{1}{2}\text{AG}\times\text{IP}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}$

2) Calculer le volume du tétraèdre ABIG. En déduire la distance du point B au plan (AIG)

Volume du tétraèdre ABIG : $\mathbb{V}_\text{ABIG}=\frac{1}{3}\mathbb{A}_\text{AIB}\times\text{GF}$

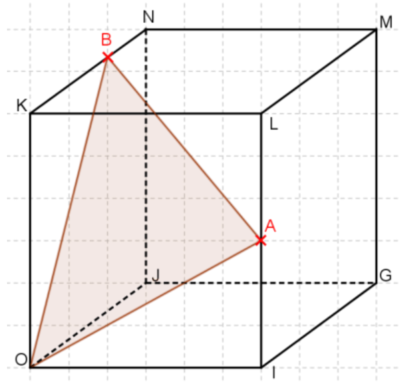
I étant le milieu de [EF] , alors $\mathbb{A}_\text{AIB}$ est égal à la moitié de l'aire de la face ABFE : $\text{A}_\text{AIB}=\frac{1}{2}$.

$$\mathbb{V}_\text{ABIG}=\frac{1}{3}\mathbb{A}_\text{AIB}\times\text{GF}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{6}$$

Soit h la distance du point B au plan (AIG), le volume du tétraèdre ABIG est aussi égal à :

$$\mathbb{V}_{ABIG} = \frac{1}{3}\mathbb{A}_{AIG} \times h \quad \text{donc} \quad h = \frac{V_{ABIG}}{\frac{1}{3}A_{AIG}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{4}} = \frac{1}{6}\times\frac{12}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Exercice 10.5 :



Soit OIGJKLMN un cube de repère orthonormal $\left(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OK}\right)$

Soit A le milieu de $[IL]$, B le point défini par $\overrightarrow{KB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{KN}$,

et soit P le plan (OAB).

1) **a)** *Préciser les coordonnées des points A et B :*

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{OI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OK} \rightarrow A\left(1;0;\frac{1}{2}\right)\ ,\ B\left(0;\frac{2}{3};1\right)$$

b) *Calculer l'aire du triangle OAB :*

Soit H le pied de la hauteur issue de A : $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} x_H - 1 \\ y_H \\ z_H - \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ 1\end{pmatrix} \rightarrow OB = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{13}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{3}$

Equation paramétrique de la droite (OB) : $\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{2}{3}k\ ,\ k \in \mathbb{R} \\ z = k \end{cases}$

Ainsi : $\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{OB} = 0 \ \Leftrightarrow\ \frac{2}{3}y_H + z_H - \frac{1}{2} = 0 \\ H \in (OB) \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} x_H = 0 \\ y_H = \frac{2}{3}k \\ z_H = k \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}y_H + z_H - \frac{1}{2} = 0 \\ x_H = 0 \\ y_H = \frac{2}{3}z_H \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}z_H + z_H - \frac{1}{2} = 0 \\ x_H = 0 \\ y_H = \frac{2}{3}z_H \end{cases}$

Ainsi : $\begin{cases} \frac{13}{9}z_H - \frac{1}{2} = 0 \\ x_H = 0 \\ y_H = \frac{2}{3}z_H \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_H = \frac{9}{26} \\ x_H = 0 \\ y_H = \frac{2}{3}\times\frac{9}{26} = \frac{3}{13} \end{cases}$ d'où : $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{13} \\ \frac{9}{26} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ soit : $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{13} \\ -\frac{2}{13} \end{pmatrix}$

$$AH = \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{3}{13}\right)^2 + \left(-\frac{2}{13}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{169} + \frac{4}{169}} = \sqrt{\frac{182}{169}} = \frac{\sqrt{182}}{13}$$

Aire du triangle OAB : $\frac{1}{2}OB \times AH = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{13}}{3}\times\frac{\sqrt{182}}{13} = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{13}}{3}\times\frac{\sqrt{13}\times\sqrt{14}}{13} = \frac{\sqrt{14}}{6}$

AUTRE METHODE :

$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}0\\\frac{2}{3}\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=1\times0+0\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}$.

Or $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OB}=OH\times OB$ avec $OB=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{\frac{13}{9}}=\frac{\sqrt{13}}{3}$

Donc : $OH\times OB=\frac{1}{2}\Leftrightarrow OH=\frac{1}{2\times OB}=\frac{1}{2\times\frac{\sqrt{13}}{3}}=\frac{3}{2\sqrt{13}}=\frac{3\sqrt{13}}{26}$

Ainsi : $\frac{OH}{OB}=\frac{\frac{3\sqrt{13}}{26}}{\frac{\sqrt{13}}{3}}=\frac{3\sqrt{13}}{26}\times\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{9}{26}\Leftrightarrow OH=\frac{9}{26}OB\Leftrightarrow\overrightarrow{OH}=\frac{9}{26}\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OH}\begin{pmatrix}0\\\frac{2}{3}\times\frac{9}{26}\\1\times\frac{9}{26}\end{pmatrix}\Leftrightarrow\overrightarrow{OH}\begin{pmatrix}0\\\frac{3}{13}\\\frac{9}{26}\end{pmatrix}$ et ainsi de suite.

c) *Le point* $C\left(1;\frac{1}{3};1\right)$ *appartient-il à P ?*

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur normal à P : $\begin{cases}\overrightarrow{OA}.\vec{n}=0\\\overrightarrow{OB}.\vec{n}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+\frac{1}{2}c=0\\\frac{2}{3}b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{1}{2}c\\b=-\frac{3}{2}c\end{cases}$

→on pose : $c=2$ donc : $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OC}.\vec{n}=1\times(-1)+\frac{1}{3}\times(-3)+1\times2=0$ donc $\overrightarrow{OC}\perp\vec{n}$ et $C\in P$

2) *On considère le tétraèdre OABK ; montrer que son volume est égal à* $\frac{1}{9}$.

En déduire la distance du point K au plan P

Volume du tétraèdre OABK

Soit H le projeté orthogonal du point K sur le plan (OAB) : le volume du tétraèdre OABK est :

$$\mathbb{V}_{OABK}=\frac{1}{3}\mathbb{A}_{OAB}\times KH$$

Le plan OAB a pour équation : $-x-3y+2z=0$

Ainsi pour F : *il existe* $k\in\mathbb{R}$ *tel que* $\begin{cases}\overrightarrow{KH}=k\vec{n}\\H\in(OAB)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_H=-k\\y_H=-3k\\z_H-1=2k\\-x_H-3y_H+2z_H=0\end{cases}$

Soit : $-(-k)-3(-3k)+2(1+2k)=0$

$k+9k+2+4k=0$

$k=-\frac{2}{14}=-\frac{1}{7}$

D'où le point H : $\begin{cases} x_H=-\left(-\frac{1}{7}\right)=\frac{1}{7} \\ y_H=-3\left(-\frac{1}{7}\right)=\frac{3}{7} \\ z_H=1+2\left(-\frac{1}{7}\right)=\frac{5}{7} \end{cases}$

Vérification : $-x_H-3y_H+2z_H=-\frac{1}{7}-3\times\frac{3}{7}+2\times\frac{5}{7}=0$

D'où le vecteur $\overrightarrow{KH}\begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$ et $KH=\sqrt{\left(\frac{1}{7}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^2+\left(-\frac{2}{7}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{49}+\frac{9}{49}+\frac{4}{49}}=\sqrt{\frac{14}{49}}=\frac{\sqrt{14}}{7}$

$\mathbb{V}_{OABK}=\frac{1}{3}\mathbb{A}_{OAB}\times KH=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{14}}{6}\times\frac{\sqrt{14}}{7}=\frac{14}{3\times6\times7}=\frac{2}{18}=\frac{1}{9}$

NB : le choix de ce deuxième point nommé H sera modifié ultérieurement