Contrôle de géométrie dans l'espace

Pour connaître la rose, quelqu'un emploie la géométrie et un autre emploi le papillon. Paul Claudel

Exercice 1 : *(7 points)*

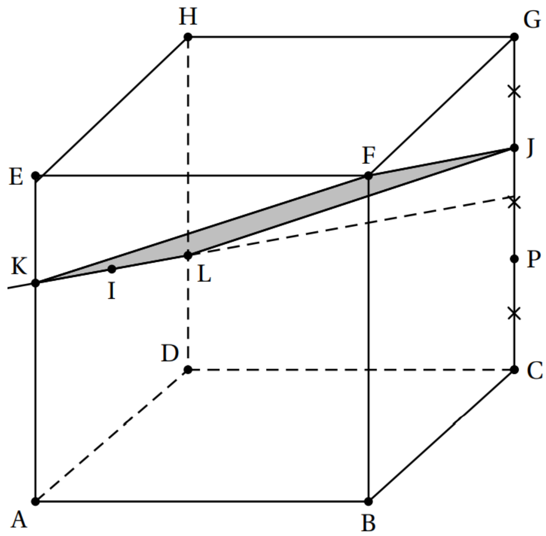
On considère un cube ABCDEFGH.
Soit I le centre de la face ADHE et J un point du segment [CG] tel que :

$$\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CG}$$

On note (d) la droite passant par I et parallèle à (FJ).

On note K et L les points d'intersection de la droite (d) et des droites (AE) et (DH).

On se place dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.



1. Donner les coordonnées des points F, I et J.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d).
3. a. Montrer que le point de coordonnées $\left(0;0;\frac{2}{3}\right)$ est le point K.

   b. Déterminer les coordonnées du point L, intersection des droites (d) et (DH).
4. a. Démontrer que le quadrilatère FJLK est un parallélogramme.
   b. Démontrer que le quadrilatère FJLK est un losange.

Exercice 2 : *(13 points)*

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points suivants :

$$A(2;-1;0),\ B(3;-1;2),\ C(0;4;1) \text{ et } S(0;1;4).$$

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.
2. a. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC).

   b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

   c. Montrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.
3. Soit (d) la droite orthogonale au plan (ABC) passant par S. Elle coupe le plan (ABC) en H.

   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d).

   b. Montrer que les coordonnées du point H sont $H(2;2;3)$.
4. On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est $V = \dfrac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.

   Calculer le volume du tétraèdre SABC
5. a. Calculer la longueur SA.
   b. On indique que $SB = \sqrt{17}$. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{ASB}$ approchée au dixième de degré.

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 1 : *(7 points)*

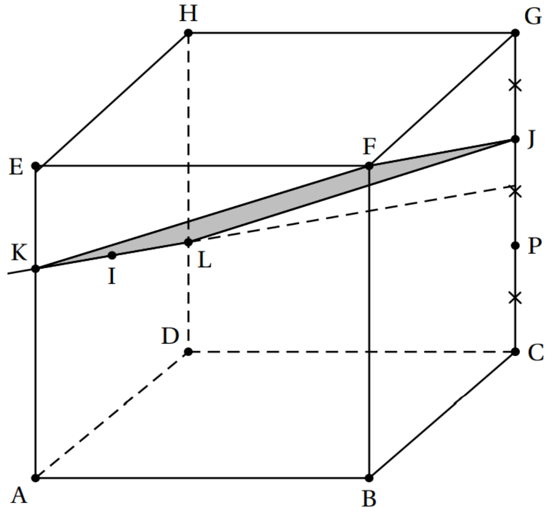
On considère un cube ABCDEFGH.

Soit I le centre de la face ADHE et J un point du segment [CG] tel que : $\overrightarrow{CJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CG}$

On note (d) *la droite passant par I et parallèle à* (FJ).

On note K et L les points d'intersection de la droite (d) *et des droites* (AE) *et* (DH).

On se place dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.



1. *Donner les coordonnées des points F, I et J.*

$F(1;0;1)$, $I\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ car $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$ et $J\left(1;1;\frac{2}{3}\right)$

2. *Déterminer une représentation paramétrique de la droite* (d).

$(d)=\left\{M/\overrightarrow{IM}=k\times\overrightarrow{FJ}\ ,\ k\in\mathbb{R}\right\}$ avec $\overrightarrow{FJ}\left(0;1;-\frac{1}{3}\right)$, donc :

$$(d):\begin{cases}x=0\\ y-\frac{1}{2}=k\\ z-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}k\end{cases}\ ,\ k\in\mathbb{R}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}x=0\\ y=k+\frac{1}{2}\\ z=-\frac{k}{3}+\frac{1}{2}\end{cases}\ ,\ k\in\mathbb{R}$$

3. **a.** *Montrer que le point de coordonnées* $\left(0;0;\frac{2}{3}\right)$ *est le point K.*

La droite (AE) est l'ensemble des points vérifiant : $\begin{cases}x=0\\ y=1\\ z\end{cases}\ ,\ z\in\mathbb{R}$. Ainsi :

$$\begin{cases}K\in(d)\\ K\in(AE)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0=0\\ k+\frac{1}{2}=0\\ z=-\frac{k}{3}+\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0=0\\ k=-\frac{1}{2}\\ z=-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\end{cases}\text{, soit : } K\left(0;0;\frac{2}{3}\right).$$

b. *Déterminer les coordonnées du point L, intersection des droites* (d) *et* (DH).

La droite (DH) est l'ensemble des points vérifiant : $\begin{cases}x=0\\ y=1\\ z\end{cases}\ ,\ z\in\mathbb{R}$. Ainsi :

$$\begin{cases} L \in (d) \\ L \in (DH) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ k + \frac{1}{2} = 1 \\ z = -\frac{k}{3} + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ k = \frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{cases}, \text{ soit : } L\left(0;1;\frac{1}{3}\right).$$

4. **a.** *Démontrer que le quadrilatère FJLK est un parallélogramme.*

On compare les vecteurs opposés :

$$\overrightarrow{FJ}\left(0;1;-\frac{1}{3}\right) \text{ et } \overrightarrow{KL}\left(0;1;-\frac{1}{3}\right) \text{ : les vecteurs opposés sont égaux.}$$

Le quadrilatère FJLK possède deux côtés opposés parallèles et de même longueur

FJLK est un parallélogramme.

b. *Démontrer que le quadrilatère FJLK est un losange.*

$$\overrightarrow{FJ}\left(0;1;-\frac{1}{3}\right) \text{ donc : } FJ = \sqrt{0^2 + 1^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{10}{9}}$$

$$\overrightarrow{FK}\left(-1;0;-\frac{1}{3}\right) \text{ donc : } FK = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{10}{9}}$$

Un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur est un losange.

Exercice 2 : *(13 points)*

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points suivants :

$A(2;-1;0)$, $B(3;-1;2)$, $C(0;4;1)$ *et* $S(0;1;4)$.

1. *Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.*

$\overrightarrow{AB}(1;0;2)$ et $\overrightarrow{AC}(-2;5;1)$ donc :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 1\times(-2) + 0\times5 + 2\times1 = -2 + 2 = 0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux donc le triangle ABC est rectangle en A.

2. **a.** *Montrer que le vecteur $\vec{n}(2;1;-1)$ est orthogonal au plan (ABC).*

Les points A, B et C ne sont pas alignés et caractérisent le plan (ABC).

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 2\times1 + 1\times0 + (-1)\times2 = 2 - 2 = 0$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 2\times(-2) + 1\times5 + (-1)\times1 = -4 + 5 - 1 = 0$$

b. *En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).*

Le vecteur $\vec{n}$ étant orthogonal au plan (ABC), l'équation cartésienne du plan (ABC) est de la forme :

$$2x + y - z + d = 0.$$

Or $C \in (ABC)$ donc :

$$2\times0 + 4 - 1 + d = 0 \Leftrightarrow 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = -3.$$

Une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$2x + y - z - 3 = 0.$$

c. *Montrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.*

On sait que $S(0;1;4)$: $2\times0 + 1 - 4 - 3 = -6$

Donc $S \notin (ABC)$ et les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

3. *Soit (d) la droite orthogonale au plan (ABC) passant par S. Elle coupe le plan (ABC) en H.*

a. *Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d).*

La droite (d) est orthogonale au plan (ABC) donc $\vec{n}$ est un de ses vecteurs directeurs :

$$(d)=\left\{\mathrm{M}/\overrightarrow{\mathrm{SM}}=k\times\vec{n}\ ,\ k\in\mathbb{R}\right\}\text{ donc :}$$

$$(d):\begin{cases}x=2k\\y-1=k\\z-4=-k\end{cases},\ k\in\mathbb{R}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}x=2k\\y=k+1\\z=-k+4\end{cases},\ k\in\mathbb{R}.$$

b. *Montrer que les coordonnées du point H sont* $\mathrm{H}(2;2;3)$.

$$\begin{cases}\mathrm{H}\in(d)\\\mathrm{H}\in(\mathrm{ABC})\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2k\\y=k+1\\z=-k+4\\2x+y-z-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2k\\y=k+1\\z=-k+4\\2\times2k+(k+1)-(-k+4)-3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=2k\\y=k+1\\z=-k+4\\4k+k+1+k-4-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2k\\y=k+1\\z=-k+4\\6k-6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\times1=2\\y=1+1=2\\z=-1+4=3\\k=1\end{cases},\text{ soit : }\mathrm{H}(2;2;3).$$

4. *On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est* $V=\dfrac{\text{aire de la base}\times\text{hauteur}}{3}$.

Calculer le volume du tétraèdre SABC.

On peut prendre pour base la face ABC et pour hauteur le segment $[\mathrm{SH}]$:

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}(1;0;2)\text{ donc : }\mathrm{AB}=\sqrt{1^2+0^2+2^2}=\sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}(-2;5;1)\text{ donc : }\mathrm{AC}=\sqrt{(-2)^2+5^2+1^2}=\sqrt{30}$$

Ainsi : $$A_{\mathrm{ABC}}=\frac{\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}}{2}=\frac{\sqrt{5}\times\sqrt{30}}{2}=\frac{\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\sqrt{6}}{2}=\frac{5\sqrt{6}}{2}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{SH}}(2;1;-1)\text{ donc : }\mathrm{SH}=\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$$

Donc : $$V=\frac{A_{\mathrm{ABC}}\times\mathrm{SH}}{3}=\frac{\frac{5\sqrt{6}}{2}\times\sqrt{6}}{3}=\frac{\frac{5\times6}{2}}{3}=\frac{15}{3}=5\ u.v.$$

5. a. *Calculer la longueur SA.*

$\mathrm{A}(2;-1;0)$ et $\mathrm{S}(0;1;4)$ donc : $\overrightarrow{\mathrm{AS}}(-2;2;4)$ et $\mathrm{AS}=\sqrt{(-2)^2+2^2+4^2}=\sqrt{24}$

b. *On indique que* $\mathrm{SB}=\sqrt{17}$ *. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{ASB}$ approchée au dixième de degré.*

$$\overrightarrow{\mathrm{SA}}(2;-2;-4)\text{ et }\overrightarrow{\mathrm{SB}}(3;-2;-2)$$

Ainsi : $\overrightarrow{\mathrm{SA}}.\overrightarrow{\mathrm{SB}}=2\times3+(-2)\times(-2)+(-4)\times(-2)=6+4+8=18$.

Or : $\overrightarrow{\mathrm{SA}}.\overrightarrow{\mathrm{SB}}=\mathrm{SA}\times\mathrm{SB}\times\cos\widehat{\mathrm{ASB}}=\sqrt{24}\times\sqrt{17}\times\cos\widehat{\mathrm{ASB}}$

Donc : $\sqrt{24}\times\sqrt{17}\times\cos\widehat{\mathrm{ASB}}=18\ \Leftrightarrow\ \cos\widehat{\mathrm{ASB}}=\dfrac{18}{\sqrt{24}\times\sqrt{17}}$

$$\Leftrightarrow\ \widehat{\mathrm{ASB}}=\cos^{-1}\left(\frac{18}{\sqrt{24}\times\sqrt{17}}\right)\simeq27{,}0°$$