

Vers les équations différentielles

Exercice 1A.1 : ChingAtome

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par la relation :

$$f(x) = e^{2x+3}$$

1. Montrer que, pour tout nombre réel x , on a la relation :

$$2f(x) - f'(x) = 0.$$

2. a. Parmi les expressions suivantes d'une fonction g , laquelle vérifie la relation $2g(x) - g'(x) = 0$:

- $g(x) = e^{2x+3} + 4$
- $g(x) = e^{8x+12}$
- $g(x) = 4e^{2x+3}$
- $g(x) = e^{-2x-3}$

b. Donner l'expression d'une troisième fonction h vérifiant la relation $2h(x) - h'(x) = 0$.

Exercice 1A.2 : ChingAtome

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par la relation :

$$f(x) = (x+1)e^{2x}$$

Montrer que la fonction f vérifie la relation :

$$f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = 0.$$

Exercice 1A.3 : ChingAtome

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par la relation :

$$f(x) = (-x-1)e^x$$

Montrer que la fonction f vérifie pour tout nombre réel x :

$$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = e^x$$

Exercice 1A.4 :

On considère l'équation différentielle :

$$f''(x) - 3f'(x) - 4f(x) = -5e^{-x}$$

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = xe^{-x}$$

Démontrer que g est une solution particulière de l'équation différentielle ci-dessus.

Exercice 1A.5 :

On considère l'équation différentielle :

$$f''(x) - f'(x) - 2f(x) = (-6x-4)e^{-x}$$

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$$

Démontrer que g est une solution particulière de l'équation différentielle ci-dessus.

Exercice 1A.6 :

On considère l'équation différentielle :

$$f''(x) - 2f'(x) + f(x) = \frac{x^2}{2} - x - 1$$

Déterminer les constantes réelles a , b et c pour que la fonction définie par $ax^2 + bx + c$ soit solution de cette équation différentielle.

Exercice 1 :

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par la relation :

$$f(x) = e^{2x+3}$$

1. Montrer que, pour tout nombre réel x , on a la relation : $2f(x) - f'(x) = 0$.

La dérivée de la fonction f est :

$$f'(x) = 2e^{2x+3}$$

Ainsi :

$$2f(x) - f'(x) = 2 \times e^{2x+3} - 2e^{2x+3} = 0$$

2. a. Parmi les expressions suivantes d'une fonction g , laquelle vérifie la relation $2g(x) - g'(x) = 0$:

- $g(x) = e^{2x+3} + 4$
- $g(x) = 4e^{2x+3}$
- $g(x) = e^{8x+12}$
- $g(x) = e^{-2x-3}$

Les dérivées de ces quatre fonctions sont :

- $g'(x) = 2e^{2x+3}$
- $g'(x) = 8e^{8x+12}$
- $g'(x) = 8e^{2x+3}$
- $g'(x) = -2e^{-2x-3}$

La relation : $2g(x) - g'(x) = 0 \Leftrightarrow g'(x) = 2g(x)$ n'est vérifiée que pour la fonction :

$$g(x) = 4e^{2x+3}$$

- b. Donner l'expression d'une troisième fonction h vérifiant la relation $2h(x) - h'(x) = 0$.

$$h(x) = 6e^{2x} \text{ car } h'(x) = 2 \times 6e^{2x} = 2 \times h(x)$$



Exercice 2 :

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par la relation : $f(x) = (x+1)e^{2x}$

Montrer que la fonction f vérifie la relation : $f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = 0$.

Les dérivées première et seconde de la fonction f sont :

$$\text{On pose : } u(x) = (x+1) \text{ et } v(x) = e^{2x}$$

$$u'(x) = 1 \text{ et } v'(x) = 2e^{2x}$$

$$f'(x) = 1 \times e^{2x} + (x+1) \times 2e^{2x} = [1 + 2(x+1)]e^{2x} = (2x+3)e^{2x}$$

$$\text{On pose : } u(x) = (2x+3) \text{ et } v(x) = e^{2x}$$

$$u'(x) = 2 \text{ et } v'(x) = 2e^{2x}$$

$$f''(x) = 2 \times e^{2x} + (2x+3) \times 2e^{2x} = [2 + 2(2x+3)]e^{2x} = (4x+8)e^{2x}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) &= (4x+8)e^{2x} - 4 \times (2x+3)e^{2x} + 4 \times (x+1)e^{2x} \\ &= [(4x+8) - 4 \times (2x+3) + 4 \times (x+1)]e^{2x} \\ &= [4x+8 - 8x - 12 + 4x + 4]e^{2x} \\ &= 0 \end{aligned}$$



Exercice 3 :

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par la relation : $f(x) = (-x-1)e^x$

Montrer que la fonction f vérifie pour tout nombre réel x : $f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = e^x$

Les dérivées première et seconde de la fonction f sont :

On pose : $u(x) = (-x-1)$ et $v(x) = e^x$

$u'(x) = -1$ et $v'(x) = e^x$

$f'(x) = -e^x + (-x-1)e^x = [-1 + (-x-1)]e^x = [-1-x-1]e^x = (-x-2)e^x$

On pose : $u(x) = (-x-2)$ et $v(x) = e^x$

$u'(x) = -1$ et $v'(x) = e^x$

$f''(x) = -e^x + (-x-2)e^x = [-1 + (-x-2)]e^x = (-x-3)e^x$

Ainsi :

$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = e^x$



Exercice 4 :

On considère l'équation différentielle : $f''(x) - 3f'(x) - 4f(x) = -5e^{-x}$

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = xe^{-x}$

Démontrer que g est une solution particulière de l'équation différentielle ci-dessus.

On pose : $u(x) = x$ et $v(x) = e^{-x}$

$u'(x) = 1$ et $v'(x) = -e^{-x}$

$g'(x) = e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$

On pose : $u(x) = 1-x$ et $v(x) = e^{-x}$

$u'(x) = -1$ et $v'(x) = -e^{-x}$

$g''(x) = -e^{-x} + (1-x) \times (-e^{-x}) = [-1 - (1-x)]e^{-x} = (x-2)e^{-x}$

Ainsi :

$$\begin{aligned} g''(x) - 3g'(x) - 4g(x) &= (x-2)e^{-x} - 3 \times (1-x)e^{-x} - 4 \times xe^{-x} \\ &= [(x-2) - 3 \times (1-x) - 4x]e^{-x} \\ &= [x-2-3+3x-4x]e^{-x} \\ &= -5e^{-x} \end{aligned}$$



Exercice 5 :

On considère l'équation différentielle : $f''(x) - f'(x) - 2f(x) = (-6x-4)e^{-x}$

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$

Démontrer que g est une solution particulière de l'équation différentielle ci-dessus.

On pose : $u(x) = x^2 + 2x$ et $v(x) = e^{-x}$

$u'(x) = 2x+2$ et $v'(x) = -e^{-x}$

$g'(x) = (2x+2)e^{-x} + (x^2 + 2x) \times (-e^{-x}) = [(2x+2) - (x^2 + 2x)]e^{-x} = (2-x^2)e^{-x}$

On pose : $u(x) = 2-x^2$ et $v(x) = e^{-x}$

$u'(x) = -2x$ et $v'(x) = -e^{-x}$

$$g''(x) = -2x \times e^{-x} + (2-x^2) \times (-e^{-x}) = [-2x - (2-x^2)]e^{-x} = (x^2 - 2x - 2)e^{-x}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} g''(x) - g'(x) - 2g(x) &= (x^2 - 2x - 2)e^{-x} - (2-x^2)e^{-x} - 2 \times (x^2 + 2x)e^{-x} \\ &= [(x^2 - 2x - 2) - (2-x^2) - 2(x^2 + 2x)]e^{-x} \\ &= [x^2 - 2x - 2 - 2 + x^2 - 2x^2 - 4x]e^{-x} \\ &= (-6x - 4)e^{-x} \end{aligned}$$

Exercice 6 :

On considère l'équation différentielle : $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = \frac{x^2}{2} - x - 1$

Déterminer les constantes réelles a , b et c pour que la fonction définie par $ax^2 + bx + c$ soit solution de cette équation différentielle.

On définit sur \mathbb{R} une fonction g par : $g(x) = ax^2 + bx + c$

Ainsi :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2ax + b \\ g''(x) &= 2a \end{aligned}$$

La relation

$$g''(x) - 2g'(x) + g(x) = \frac{x^2}{2} - x - 1$$

équivalent à :

$$\begin{aligned} 2a - 2 \times (2ax + b) + ax^2 + bx + c &= \frac{x^2}{2} - x - 1 \\ \Leftrightarrow 2a - 4ax - 2b + ax^2 + bx + c &= \frac{x^2}{2} - x - 1 \\ \Leftrightarrow ax^2 + (b - 4a)x + 2a - 2b + c &= \frac{1}{2}x^2 - x - 1 \end{aligned}$$

Par identification des coefficients, on obtient :

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b - 4a = -1 \\ 2a - 2b + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -1 + 4a = -1 + 4 \times \frac{1}{2} = 1 \\ 2a - 2b + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \\ c = -1 - 2a + 2b = -1 - 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times 1 = 0 \end{cases}$$

Soit :

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$$

Vérification :

$$g'(x) = \frac{1}{2} \times 2x + 1 = x + 1$$

$$g''(x) = 1$$

$$\begin{aligned} g''(x) - 2g'(x) + g(x) &= 1 - 2(x + 1) + \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) \\ &= 1 - 2x - 2 + \frac{1}{2}x^2 + x = \frac{1}{2}x^2 - x - 1 \end{aligned}$$