EXERCICE 1B.1

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'-3y=0$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=-5e^{3x}$$

Démontrer que f est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

EXERCICE 1B.2

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'=-2y$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\sqrt{3}e^{-2x}$$

Démontrer que f est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

EXERCICE 1B.3

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y''+9y=0$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\cos 3x-3\sin 3x$$

Démontrer que f est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

EXERCICE 1B.4

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y''+y=2\sin x$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=-x\cos x$$

Démontrer que f est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

EXERCICE 1B.5

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y''-3y'-4y=-5e^{-x}$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=xe^{-x}$$

Démontrer que f est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

EXERCICE 1B.6

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'+710y=710$$

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x)=1$$

Démontrer que f est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

EXERCICE 1B.7

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'+y=2e^{-x}$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=2xe^{-x}$$

Démontrer que f est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

EXERCICE 1B.8

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'-2y=xe^{x}$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=(-x-1)e^{x}$$

Démontrer que f est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

EXERCICE 1B.9

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'-2y=e^{2x}$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=xe^{2x}$$

Démontrer que f est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

EXERCICE 1B.10

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad (1+x)y'+y=\frac{1}{1+x}$$

Soit f la fonction définie sur $]-1 ; +\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{\ln(1+x)}{1+x}$$

Démontrer que f est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

EXERCICE 1B.11

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y''-y'-2y=(-6x-4)e^{-x}$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\left(x^2+2x\right)e^{-x}$$

Démontrer que f est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

EXERCICE 1B.12

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y''-2y'+y=\frac{x^2}{2}-x-1$$

Déterminer les constantes réelles a, b et c pour que la fonction définie par ax^2+bx+c soit solution de l'équation différentielle (E).

CORRIGE – NOTRE DAME DE LA MERCI MONTPELLIER – M. QUET

EXERCICE 1B.1

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y'-3y=0$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-5e^{3x}$

Démontrer que f est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

→ $f'(x)-3f(x)=-15e^{3x}-3\times\left(-5e^{3x}\right)=0$

f est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

EXERCICE 1B.2

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y'=-2y$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{3}e^{-2x}$

Démontrer que f est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

→ $f'(x)+2f(x)=\sqrt{3}\times(-2)e^{-2x}+2\times\sqrt{3}e^{-2x}=0$

f est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

EXERCICE 1B.3

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y''+9y=0$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\cos 3x-3\sin 3x$$

Démontrer que f est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

→ $f'(x)=-3\sin 3x-9\cos 3x$

$f''(x)=-9\cos 3x+27\sin 3x$

Donc $f''(x)+9f(x)=0$

f est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

EXERCICE 1B.4

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y''+y=2\sin x$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=-x\cos x$$

Démontrer que f est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

→ $f'(x)=-\cos x-x\times(-\sin x)=-\cos x+x\sin x$

$f''(x)=\sin x+\sin x+x\cos x$

Donc $f''(x)+f(x)=2\sin x$

f est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

EXERCICE 1B.5

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y''-3y'-4y=-5e^{-x}$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=xe^{-x}$$

Démontrer que f est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

→ $f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}$

$f''(x)=-e^{-x}-e^{-x}+xe^{-x}=-2e^{-x}+xe^{-x}$

Donc $f''(x)-3f'(x)-4f(x)=-5e^{-x}$

f est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

EXERCICE 1B.6

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y'+710y=710$$

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;+\infty[$ par :

$$f(x)=1$$

Démontrer que f est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

→ $f'(x)=0$

Donc $f'(x)+710f(x)=710$

f est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

EXERCICE 1B.7

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y'+y=2e^{-x}$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=2xe^{-x}$$

Démontrer que f est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

→ $f'(x)=2e^{-x}-2xe^{-x}$

Donc $f'(x)+f(x)=2e^{-x}-2xe^{-x}+2xe^{-x}=2e^{-x}$

f est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

EXERCICE 1B.8

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y'-2y=xe^{x}$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=(-x-1)e^{x}$$

Démontrer que f est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

→ $f'(x)=-e^{x}+(-x-1)e^{x}=(-x-2)e^{x}$

Donc $f'(x)-2f(x)=(-x-2)e^{x}-2(-x-1)e^{x}$

$=(-x-2+2x+2)e^{x}=xe^{x}$

f est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

EXERCICE 1B.9

On considère l'équation différentielle :

$$(E)\qquad y'-2y=e^{2x}$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=xe^{2x}$$

Démontrer que f est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

→ $f'(x)=e^{2x}+2xe^{2x}$

Donc $f'(x)-2f(x)=e^{2x}+2xe^{2x}-2xe^{2x}=e^{2x}$

f est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

EXERCICE 1B.10

On considère l'équation différentielle :

$$(E)\qquad (1+x)y'+y=\frac{1}{1+x}$$

Soit f la fonction définie sur]-1 ; +∞[par :

$$f(x)=\frac{\ln(1+x)}{1+x}$$

Démontrer que f est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

→ $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{1+x}\times(1+x)-\ln(1+x)}{(1+x)^2}=\dfrac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}$

$(1+x)f'(x)+f(x)=(1+x)\dfrac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}+\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$

$=\dfrac{1-\ln(1+x)}{1+x}+\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}=\dfrac{1}{1+x}$

f est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

EXERCICE 1B.11

On considère l'équation différentielle :

$$(E)\qquad y''-y'-2y=(-6x-4)e^{-x}$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=(x^2+2x)e^{-x}$$

Démontrer que f est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

→ $f'(x)=(2x+2)e^{-x}-(x^2+2x)e^{-x}$

$=(2-x^2)e^{-x}$

$f''(x)=-2xe^{-x}-(2-x^2)e^{-x}$

$=(x^2-2x-2)e^{-x}$

$f''(x)-f'(x)-2f(x)=(x^2-2x-2)e^{-x}$

$-(2-x^2)e^{-x}-2(x^2+2x)e^{-x}$

$=(x^2-2x-2-2+x^2-2x^2-4x)e^{-x}$

$=(-6x-4)e^{-x}$

f est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

EXERCICE 1B.12

On considère l'équation différentielle :

$$(E)\qquad y''-2y'+y=\frac{x^2}{2}-x-1$$

Déterminer les constantes réelles a, b et c pour que la fonction définie par ax^2+bx+c soit solution de l'équation différentielle (E).

Soit $f(x)=ax^2+bx+c$

Donc $f'(x)=2ax+b$

Et $f''(x)=2a$

Ainsi : $f''(x)-2f'(x)+f(x)=2a-2(2ax+b)$

$+ax^2+bx+c$

$=ax^2+(b-4a)x+2a-2b+c$

Pour que la fonction f soit solution de l'équation différentielle (E), on doit avoir :

$$f''(x)-2f'(x)+f(x)=\frac{x^2}{2}-x-1$$

$$\Leftrightarrow\ ax^2+(b-4a)x+2a-2b+c=\frac{x^2}{2}-x-1$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ b-4a=-1\\ 2a-2b+c=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ b=-1+4a=1\\ c=-1-2a+2b=0\end{cases}$$

On obtient la fonction f suivante :

$f(x)=\frac{1}{2}x^2+x$.