EXERCICES 3D.1

Déterminer une primitive d'une fonction f de la forme : $\dfrac{U'}{U}$

a. $f(x)=\dfrac{12}{12x+7}$, $x>-\dfrac{7}{12}$ → ……………………………………………………

→on pose $u(x)=$................ donc $u'(x)=$................

→ainsi : $f(x)=$....................... et $F(x)=$...

b. $f(x)=\dfrac{4x-2}{2x^2-2x+7}$, $x\in\mathbb{R}$ → ……………………………………………………

……………………………………………………

→ on pose $u(x)=$..................... donc $u'(x)=$................

→ainsi : $f(x)=$....................... et $F(x)=$...

c. $f(x)=\dfrac{-8x}{9-4x^2}$, $x>2$ → ……………………………………………………

→ on pose $u(x)=$................ donc $u'(x)=$................

→ainsi : $f(x)=$....................... et $F(x)=$...

EXERCICES 3D.2

Transformer f pour faire apparaître une forme « connue » $k\times\dfrac{U'}{U}$ puis déterminer une primitive :

a. $f(x)=\dfrac{1}{3x+7}$, $x\geq 0$ → ……………………………………………………

→on pose $u(x)=$................ donc $u'(x)=$................

→ainsi : $f(x)=$.. et $F(x)=$...

b. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+7}$, $x\geq 0$ → ……………………………………………………

→on pose $u(x)=$................ donc $u'(x)=$................

→ainsi : $f(x)=$.. et $F(x)=$...

c. $f(x)=\dfrac{4x+12}{x^2+6x-7}$, $x\in\mathbb{R}^+-\{1\}$ → ……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

→on pose $u(x)=$......................... donc $u'(x)=$................

→ $f(x)=$....................... et $F(x)=$..

EXERCICE 3D.3

On considère la fonction suivante définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = 2\ln x + 3 .$$

Déterminer les réels a et b tels que la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x)=x(a\ln x+b)$ soit une primitive de f.

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

EXERCICES 3D.1 *Déterminer une primitive d'une fonction f de la forme :* $\dfrac{U'}{U}$

a. $f(x)=\dfrac{12}{12x+7}$, $x>-\dfrac{7}{12}$ →si $x>-\dfrac{7}{12}$, alors $\dfrac{12}{12x+7}>0$

→on pose $u(x)=12x+7$ donc $u'(x)=12$

→ainsi : $f(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ et $F(x)=\ln(|u(x)|)=\ln(|12x+7|)=\ln(12x+7)$

b. $f(x)=\dfrac{4x-2}{2x^2-2x+7}$, $x\in\mathbb{R}$ → $\Delta=(-2)^2-4\times2\times7=4-56=-52$ et $a=2$ donc $a>0$

Ainsi pour tout $x\in\mathbb{R}$: $2x^2-2x+7>0$

→ on pose $u(x)=2x^2-2x+7$ donc $u'(x)=4x-2$

→ainsi : $f(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ et $F(x)=\ln(|u(x)|)=\ln\left(\left|2x^2-2x+7\right|\right)=\ln\left(2x^2-2x+7\right)$

c. $f(x)=\dfrac{-8x}{9-4x^2}$, $x>2$ →si $x>2$: $-8x<0$ et $9-4x^2<0$ donc $\dfrac{-8x}{9-4x^2}>0$

→ on pose $u(x)=9-4x^2$ donc $u'(x)=-8x$

→ainsi : $f(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ et $F(x)=\ln(|u(x)|)=\ln\left(\left|9-4x^2\right|\right)=\ln\left(9-4x^2\right)$

EXERCICES 3D.2

Transformer f pour faire apparaître une forme « connue » $k\times\dfrac{U'}{U}$ *puis déterminer une primitive :*

a. $f(x)=\dfrac{1}{3x+7}$, $x\geq0$ →pour tout réel $x\geq0$: $\dfrac{1}{3x+7}>0$

→on pose $u(x)=3x+7$ donc $u'(x)=3$

→ainsi : $f(x)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{3x+7}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ et $F(x)=\dfrac{1}{3}\ln(|u(x)|)=\dfrac{1}{3}\ln(|3x+7|)=\dfrac{1}{3}\ln(3x+7)$

b. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+7}$, $x\geq0$ → pour tout réel $x\geq0$: $\dfrac{x}{x^2+7}>0$

→on pose $u(x)=x^2+7$ donc $u'(x)=2x$

→ainsi : $f(x)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2x}{x^2+7}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ et $F(x)=\dfrac{1}{2}\ln(|u(x)|)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\left|x^2+7\right|\right)=\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+7\right)$

c. $f(x)=\dfrac{4x+12}{x^2+6x-7}$, $x\in\mathbb{R}^+-\{1\}$ → $\Delta=6^2-4\times1\times(-7)=64=8^2$: $\Delta>0$ donc deux racines :

$$x_1=\frac{-6-8}{2\times1}=\frac{-14}{2}=-7 \text{ et } x_2=\frac{-6+8}{2\times1}=\frac{2}{2}=1$$

$a=2$ donc $a>0$: pour tout réel $x>1$: $x^2+6x-7>0$

→on pose $u(x)=x^2+6x-7$ donc $u'(x)=2x+6$

→ $f(x)=2\times\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ et $F(x)=2\ln(|u(x)|)=2\ln\left(\left|x^2+6x-7\right|\right)=\begin{cases}2\ln\left(x^2+6x-7\right) & \text{si } x>1\\ 2\ln\left(-x^2-6x+7\right) & \text{si } 0\leq x<1\end{cases}$

EXERCICE 3D.3

On considère la fonction suivante définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ *par :* $f(x)=2\ln x+3$.

Déterminer les réels a et b tels que la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ *par* $F(x)=x(a\ln x+b)$ *soit une primitive de f.*

Si *F* est une primitive de *f*, alors :

$$F'(x)=f(x).$$

Or : $$F'(x)=1\times(a\ln x+b)+x\times\left(a\times\frac{1}{x}+0\right)=a\ln x+b+a$$

Ainsi : $$a\ln x+b+a=2\ln x+3$$

Soit : $$\begin{cases}a=2\\b+a=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=3-a=1\end{cases}.$$

La primitive cherchée est :

$$F(x)=x(2\ln x+1)$$